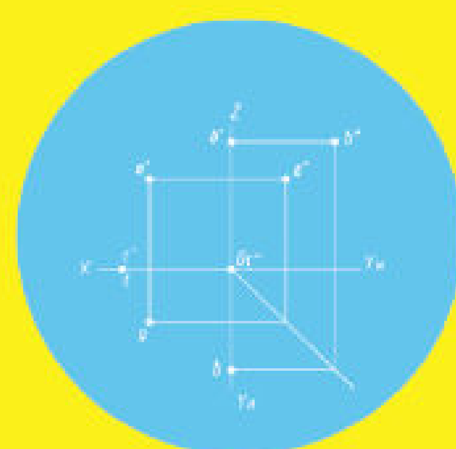
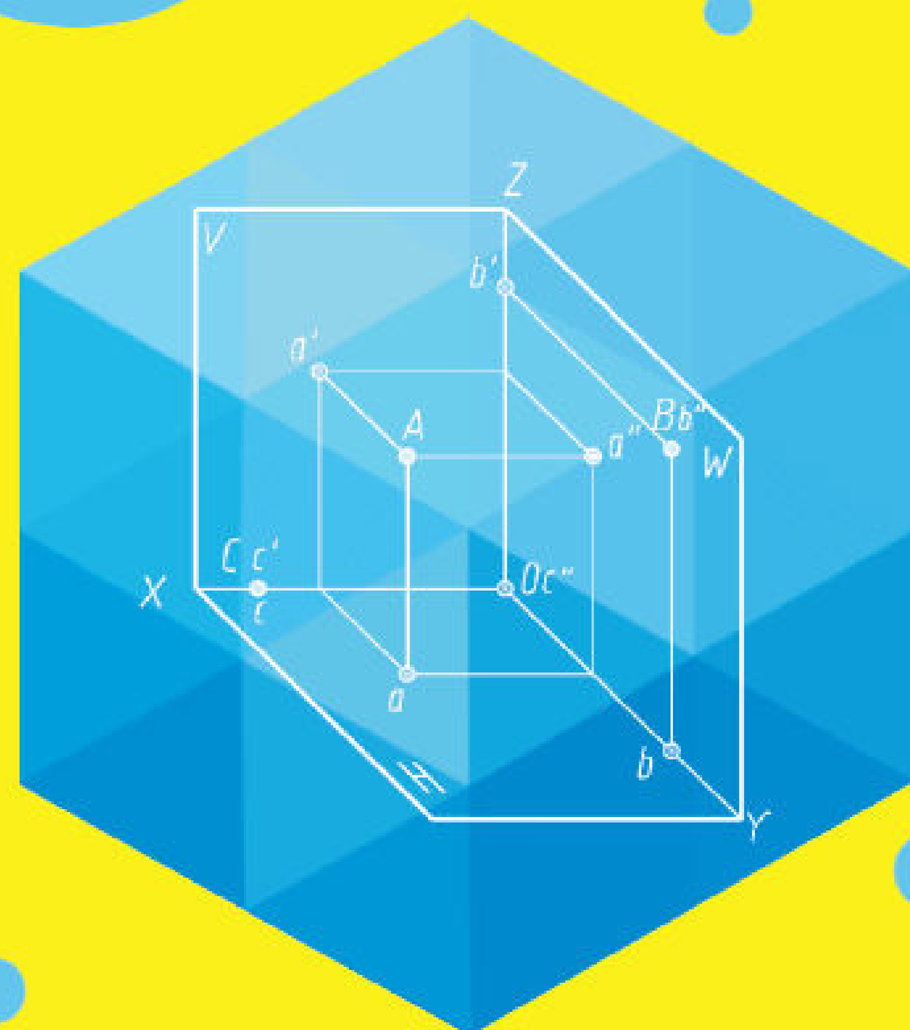
高等数学

习题解析（下）

程晓亮　张　平　主　编
张国芳　冯志新　副主编





清华大学出版社

高等数学习题解析

（下）

程晓亮　张　平　主　编
张国芳　冯志新　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等院校数学课程《高等数学(下)》(ISBN：978-7-302-47530-9)一书相配套的习题解析。本书严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过习题解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论，掌握相应的方法和技巧。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题解析. 下 / 程晓亮，张平　主编. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-47577-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①程… ②张… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－解题 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 150776 号

责任编辑： 王　定　程　琪
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 曹　阳
责任印制： 沈　露

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http：//www.tup.com.cn，http：//www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 北京密云胶印厂
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 11　　**字　　数：** 240 千字
版　　次： 2018 年 1 月第 1 版　　**印　　次：** 2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数： 1～3000
定　　价： 45.00 元

产品编号：071018-01

前　　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍“高等数学”课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。

本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》	ISBN：978-7-302-47529-3	定价：45.00元
《高等数学习题解析（上）》	ISBN：978-7-302-47810-2	定价：45.00元
《高等数学（下）》	ISBN：978-7-302-47530-9	定价：45.00元
《高等数学习题解析（下）》	ISBN：978-7-302-47577-4	定价：45.00元

本书是高等院校数学课程《高等数学（下）》（ISBN：978-7-302-47530-9）一书相配套的习题解析，严格按照配套教材的章节的顺序，以节为单位进行编写。每小节内容有知识点概括和习题解答。知识点概括精炼、全面，帮助学生加深教材所学知识，明确学习重点和难点。习题解答对较难的习题给出题前分析、详尽的解答步骤和题后注释，还对某些典型题的分析方法和技巧作了详细说明，切实帮助学生检验教材内容的掌握程度，查漏补缺。本书期望能够通过知识点概括帮助学生理清知识的脉络，加深读者对新知识的理解和掌握；通过分析解答为学生提供分析问题和解决问题的方法，从而更好地学习高等数学的基本知识和理论、掌握相应的方法和技巧。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课程“高等数学”的学习辅助材料，以及其他数学教育工作者的参考资料。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编著者

2017年8月

目　　录



第 1 章　空间解析几何初步

空间解析几何与平面解析几何的思想方法类似，都是利用代数方法研究几何问题，其重要的工具是向量代数．平面解析几何的基本对象是直线与曲线，空间解析几何的基本对象是平面和直线，以及几种特殊的曲面和曲线．这些内容对学习多元函数微积分将起到重要的作用．

1.1　向量及线性运算

1.1.1　知识点概况

1. 向量的概念

(1) 既有大小又有方向的量叫做向量，记作 $\boldsymbol{a}$，向量的大小叫做向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$.

(2) 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角．方向角的余弦值称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．

若非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$的方向角为 α，β，γ，则其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加法：对向量 $\boldsymbol{a}$，b，从同一起点 O 作有向线段$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 b，然后以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$，则把平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2) 向量的减法：当向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(3) 数乘：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 其模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 我们把这种运算叫做数量与向量的乘法，简称数乘.

3. 向量的位置关系

(1) 两向量的夹角：非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，从同一起点 O 作有向线段$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，把由射线 OA 和 OB 构成的角度在$[0, \pi]$的角称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

(2) 两向量共线：平行于同一直线的一组向量叫做共线向量. 零向量与任何共线的向量组共线.

(3) 三向量共面：平行于同一平面的一组向量，叫做共面向量. 零向量与任何共线的向量组共面.

4. 空间直角坐标系

(1) 建立：过空间一点 O，作三条两两互相垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就构成了空间直角坐标系，记作 $O-xyz$.

(2) 向量的坐标表示：若 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴上与坐标轴同向的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 我们把 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 系数组成的有序数组(x, y, z)叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标.

(3) 两点之间的距离：设 $M(x_1, y_1, z_1)$，$N(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则得到空间两点 M 与 N 之间的距离公式：

$$d=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

(4) 线性运算的坐标表示：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

1.1.2　习题解答

1. 设向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}$.

解： $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}=3\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-4\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})$

$=2\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}-23\boldsymbol{c}.$

2. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,-1,1)$，$B(1,1,-1)$，$C(1,-1,-1)$，$D(-1,-1,1)$.

解： A 在第四卦限，B 在第五卦限，C 在第八卦限，D 在第三卦限．

3. 求证：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证明： $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$，

$|\overrightarrow{M_1M_3}|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$，

$|\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$，

$|\overrightarrow{M_1M_3}|=|\overrightarrow{M_2M_3}|$，

故为等腰三角形．

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线 AC 与 BD 的交点，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MD}$.

解： $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$，$\overrightarrow{MA}=-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$，

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB}$，

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$，$\overrightarrow{MD}=-\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}$.

5. 求点 $P(2,-5,4)$到原点及各坐标轴和各坐标面的距离．

解： $|\overrightarrow{PO}|=\sqrt{(2-0)^2+(-5-0)^2+(4-0)^2}=3\sqrt{5}$.

P 在 x 轴上的投影为 2，P 到 x 轴的距离即 P 与$(2,0,0)$的距离，即

$\sqrt{(2-2)^2+(-5-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{41}$.

同理，P 到 y 轴的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(-5-(-5))^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

P 到 z 轴的距离为 $\sqrt{(2-0)^2+(-5-0)^2+(4-4)^2}=\sqrt{29}$.

P 到 xOy 平面的距离为 4，P 到 xOz 平面的距离为 5，P 到 yOz 平面的距离为 2.

6. 在 yOz 平面上，求与三个已知点(3，1，2)，(4，−2，−2)，(0，5，1)等距离的点．

解： 设点为$(x，y，z)$，已知点在 yOz 平面上，故 $x=0$，点为$(0，y，z)$，故

$$\begin{cases}\sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(-2-y)^2+(-2-z)^2}\\ \sqrt{(3-0)^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(5-y)^2+(1-z)^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}10+6y+8z=0\\ 12-8y+2z=0\end{cases},$$

解得 $y=1$，$z=-2$，故点为(0，1，−2)．

7. 设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0，\sqrt{2}，3)$的距离为到点 $P_2(0，1，-1)$的距离的两倍，求点 P 的坐标．

解： 因为点 P 在 x 轴上，故可设点 P 的坐标为$(x，0，0)$，则

$$|\overrightarrow{PP_1}|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},$$

$$|\overrightarrow{PP_2}|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}.$$

由于$|\overrightarrow{PP_1}|=2|\overrightarrow{PP_2}|$，即 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$，解得 $x=\pm 1$，从而所求点 P 的坐标为(1，0，0)或(−1，0，0)．

8. 已知两点 $M_1(0，1，2)$和 $M_2(1，-1，0)$，试用坐标表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$．

解： $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0，-1-1，0-2)=(1，-2，-2)$，

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1，-2，-2)=(-2，4，4)$．

9. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求：(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，(3)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$．

解： $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，

$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{k}-3\boldsymbol{k}$．

10. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1，1，1)$的单位向量．

解： $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，

$$\boldsymbol{e}_a=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1，1，1).$$

11. 求 λ 使向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda，1，5)$与向量 $\boldsymbol{b}=(2，10，50)$平行．

解： $\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{1}{10}=\dfrac{5}{50}$，故 $\lambda=\dfrac{1}{5}$．

12. 设点 $A(1，-1，2)$，$B(4，1，3)$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$在三个坐标轴上的坐标和分向量；

(2) $\overrightarrow{AB}$的方向余弦．

解：$\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$，在三个坐标轴上的坐标分别为3，2，1，分向量分别为

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

13. 已知两点$A(2,\sqrt{2},5)$，$B(3,0,4)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角．

解：$\overrightarrow{AB}=(1,-\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{AB}$的模为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$.

方向余弦为$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$.

方向角为$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{2\pi}{3}$.

14. 设向量的方向角为α，β，γ，若已知$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，求γ.

解：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1$，

解得：$\cos\gamma=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$.

15. 设向量的方向余弦分别满足：(1)$\cos\alpha=0$；(2)$\cos\beta=1$；(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$.

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解：(1) 垂直于x轴，平行于yOz平面；

(2) 平行于y轴，垂直于xOz平面；

(3) 平行于z轴，垂直于xOy平面．

16. 设$M_1(1,-2,-3)$，$M_2(2,-4,-1)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$平行的单位向量．

解：$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-2,2)$，

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$，

$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{M_1M_2}}=\pm\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3}\right)$.

17. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,5,-1)$，$\boldsymbol{c}=(6,4,-6)$，证明$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$平行．

解：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-2,3)$，

$\dfrac{-3}{6}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{3}{-6}-=-\dfrac{1}{2}$，



对应坐标成比例，故平行．

18. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影．

解：$4\times\cos\frac{\pi}{3}=2$，投影为 2.

1.2　数量积与向量积

1.2.1　知识点概况

1. 数量积

(1) 定义：设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称内积或点积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，读作"$\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$"，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

(2) 坐标运算：在空间直角坐标系下，设

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1, y_1, z_1),\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2, y_2, z_2),$$

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

(3) 运算律：对于任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 及任意实数 λ，有

① 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

② 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

③ 关于数因子的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

2. 向量积

(1) 定义：两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ (夹角为 $\boldsymbol{\theta}$) 的向量积(也称外积或叉积)是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读作"$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$"，其模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta.$$

其方向与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均垂直，且按 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手系.

其模的几何意义是以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(2) 坐标运算：在空间直角坐标系下，设

$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1, y_1, z_1)$,

$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2, y_2, z_2)$,

则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

(3) 运算律：对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及任意实数 $\boldsymbol{\lambda}$，有

① 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

② 分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

③ 与数乘的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

3. 向量的位置关系的判定

(1) 两向量垂直的判定：设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

(2) 两向量平行的判定：设非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ 存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

(3) 三向量共面的判定：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$，则

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

4. 两向量的夹角公式：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\times\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

1.2.2 习题解答

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{b}=(0, 1, 0)$，$\boldsymbol{c}=(0, 0, 1)$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

解：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{b}=(2, 2, 1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦.

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+0\times2+0\times1=2$，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=(0, -1, 2),$$

可计算：$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\cos\theta=\frac{2}{3}$.

3. 计算：(1)$(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}$；(2)$(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}$；(3)$(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}$.

解：(1)$(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}=2\times0+(-1)\times1+0\times0=-1$；

(2)$(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}=2\times0+3\times0+4\times1=4$；

(3)$(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}=1\times1+5\times0+0\times0=1$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，计算：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2)$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦 .

解：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times7+2\times2+5\times(-1)=-8$；

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&5\\7&2&-1\end{vmatrix}=(-12,34,-16).$$

(2)$-2\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}$，$3\boldsymbol{b}=21\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，

$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=2\times21+(-4)\times6+(-10)\times(-3)=48$；

$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&2&5\\14&4&-2\end{vmatrix}=-24\boldsymbol{i}+68\boldsymbol{j}-32\boldsymbol{k}.$$

(3)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{30}$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{6}$，

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-8}{\sqrt{30}\times3\sqrt{6}}=-\frac{4}{9\sqrt{5}}.$$

5. 已知点 $A(-1,2,3)$，$B(1,2,1)$，$C(0,0,3)$，求$\angle ABC$.

解：$\overrightarrow{BC}=(0-1,0-2,3-1)=(-1,-2,2)$，$|\overrightarrow{BC}|=3$，

$\overrightarrow{BA}=(-1-1,2-2,3-1)=(-2,0,2)$，$|\overrightarrow{BA}|=2\sqrt{2}$，

$$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. 求点 $M(1,\sqrt{2},1)$的向径$\overrightarrow{OM}$与坐标轴之间的夹角 .

解：$\overrightarrow{OM}=(1,\sqrt{2},1)$，$|\overrightarrow{OM}|=2$，$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{OM}}=\frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)$.

故 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

所以夹角分别为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

7. 验证 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直.

证明：$1\times2+3\times(-1)+(-1)\times(-1)=0$，故垂直.

8. 已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

解：$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$，

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

所以，所求向量为$\dfrac{(6,-4,-4)}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}(3,-2,-2)$.

9. 求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(-3,6,8)$和 y 轴的单位向量.

解：设所求向量为(a,b,c)，则依题意有：

$(-3)\cdot a+6\cdot b+8\cdot c=0$，$a\cdot0+b\cdot1+c\cdot0=0$，得 $b=0$，$a=\dfrac{8c}{3}$.

又因所求为单位向量，故模为 1，有$\sqrt{\left(\dfrac{8c}{3}\right)^2+c^2}=1$，解得 $c=\dfrac{3}{\sqrt{73}}$.

所求向量为$\left(\dfrac{8}{\sqrt{73}},0,\dfrac{3}{\sqrt{73}}\right)$.

10. 已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模.

解：$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$

$$=|2\boldsymbol{a}|^2+|3\boldsymbol{b}|^2+2\cdot|2\boldsymbol{a}|\cdot|3\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=196,$$

故$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=14$.

11. 求以点 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$为顶点的三角形的面积.

解：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\dfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

由于$\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}$.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，并计算以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积．

解：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，故$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=8\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，

$S=|8\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{77}$.

13. 用向量方法证明三角形的正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

证明：设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，且$|\boldsymbol{a}|=a$，$|\boldsymbol{b}|=b$，$|\boldsymbol{c}|=c$，知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，因此，

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

同理可得$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所以

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

故$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，即 $bc\sin A=ca\sin B=ab\sin C$，于是

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

14. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解：依题意可设向量$\boldsymbol{b}$ 为$(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，故

$2\cdot 2\lambda+(-1)\cdot(-\lambda)+2\cdot 2\lambda=-18$，解得 $\lambda=-2$.

所求向量为 $\boldsymbol{b}=(-4,2,-4)$.

1.3 平面及其方程

1.3.1 知识点概况

1. 平面的方程

(1) 点法式：设平面 Π 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于方向向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，则所求平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

(2) 一般式：形如 $Ax+By+Cz+D=0$ (A, B, C 不全为零)；

(3) 三点式：设平面 Π 过三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$，M_1，M_2，M_3 不共线，则该平面 Π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

2. 两平面的位置关系

设两个平面 Π_1 与 Π_2 的方程分别为

Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$(A_1，B_1，C_1 不同时为零)，

Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$(A_2，B_2，C_2 不同时为零)，

则它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$.

我们可以从两个平面方程的法向量之间的关系导出它们之间的位置关系，如下：

(1) 两平面重合$\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

(2) 两平面平行$\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

(3) 两平面相交$\Leftrightarrow A_1$，B_1，C_1 与 A_2，B_2，C_2 不成比例，即 $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$.

特殊地，当两平面相交时，我们通常关心它们的夹角 θ，公式如下：

$$\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

3. 点到平面的距离

设平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$（A，B，C 不全为零），平面外一点 $M(x_0, y_0, z_0)$，可以得到点 M 到平面 Π 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

1.3.2 习题解答

1. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面：

(1) $x=0$；　(2) $3y-1=0$；　(3) $2x-3y-6=0$；

(4) $x-\sqrt{3}y=0$；　(5) $y+z=1$；　(6) $x-2z=0$；

(7) $6x+5y-z=0$.

解：(1) yOz 平面，图略；

(2) 平行于 xOz 面的平面，图略；

(3) 平行于 z 轴的平面，图略；

(4) 通过 z 轴的平面，图略；

(5) 平行于 x 轴的平面，图略；

(6) 通过 y 轴的平面，图略；

(7) 通过原点的平面，图略.

2. 求过点 $M(1, 2, 3)$，以 $\boldsymbol{n}=(2, 2, 1)$为法向量的平面方程.

解：$2(x-1)+2(y-2)+(z-3)=0$，

即平面方程为 $2x+2y+z-9=0$.

3. 求过点 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$的平面方程.

解：$\overrightarrow{AB}=(-1, 1, 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1, 0, 1)$.

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

故平面方程为 $1\times(x-1)+1\times(y-0)+1\times(z-0)=0$，即 $x+y+z=1$.

4. 求过原点及点 $M(1, 1, -1)$，且垂直于平面 $4x+3y+z-1=0$ 的平面方程.

解：由于$\overrightarrow{OM}=(1, 1, -1)$，$\boldsymbol{n}_1=(4, 3, 1)$，所以所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

故平面方程为 $4x-5y-z=0$.

5. 求过点(0，0，1)且与平面 $3x+4y+2z=1$ 平行的平面方程．

解：因为与已知平面平行，故法向量相同，故

$3(x-0)+4(y-0)+2(z-1)=0$，即 $3x+4y+2z-2=0$.

6. 求过 x 轴和点(4，−3，−1)的平面方程．

解：过 x 轴，所以也过原点，有$\overrightarrow{OM}=(4,-3,-1)$.

x 轴的单位向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，因此所求平面的法向量为

$$\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

故平面方程为 $y-3z=0$.

7. 求过点(1，1，1)且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程．

解：已知所给两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(3,2,-12)$，因此所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -12\end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

故平面方程为 $2x+3y+z-6=0$.

8. 一平面过点(1，0，−1)且与向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$均平行，试求该平面方程.

解：$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

故平面方程为 $1\times(x-1)+1\times(y-0)-3(z+1)=0$，

即 $x+y-3z-4=0$.

9. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标平面夹角的余弦．

解：$2x-2y+z+5=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，$|\boldsymbol{n}|=3$，

xOy 平面的法向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，与 xOy 平面的夹角的余弦为

$\cos\alpha=\dfrac{2\times0+(-2)\times0+1\times1}{3\times1}=\dfrac{1}{3}$，

xOz 平面法向量为 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，与 xOz 平面的夹角的余弦同理可得 $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$；

yOz 平面法向量为 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，与 yOz 平面的夹角的余弦同理可得 $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$.

10. 求三平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=1$，$-x+2y+2z=3$ 的交点．

解：由 $\begin{cases}x+3y+z=1,\\2x-y-z=1,\\-x+2y+2z=3,\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{5}{3}$，$y=-\dfrac{3}{2}$，$z=\dfrac{23}{6}$.

11. 分别在下列条件下确定 l，m，n 的值：

(1) 使 $(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 和 $(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$ 表示同一平面；

(2) 使 $2x+my+3z-5=0$ 与 $lx-6y-6z+2=0$ 表示两平行平面；

(3) 使 $lx+y-3z+1=0$ 与 $7x+2y-z=0$ 表示互相垂直的平面.

解：(1) 将 $(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 等号左右两边乘 -2 得：

$-2(l-3)x-2(m+1)-2(n-3)z-16=0$，

与另一个平面应系数相同，故

$\begin{cases}-2(l-3)=m+3,\\-2(m+1)=n-9,\\-2(n-3)=l-3,\end{cases}$

解得 $l=\dfrac{7}{9}$，$m=\dfrac{13}{9}$，$n=\dfrac{37}{9}$.

(2) 由 $\dfrac{2}{l}=\dfrac{m}{-6}=\dfrac{3}{-6}$，故 $l=-4$，$m=3$.

(3) 由 $l\times7+1\times2+(-3)\times(-1)=0$，故 $l=-\dfrac{5}{7}$.

12. 分别依下列条件求平面方程：

(1) 平行于坐标平面 xOz，且经过点 $(2,-5,3)$；

(2) 过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$；

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $A(4,0,-2)$ 和 $B(5,1,7)$；

(4) 与原点距离 3 个单位，且平行于平面 $x+y+z-1=0$.

解：(1) 平行于 xOz 平面，则 A，C 为 0，故平面方程为 $By+D=0$.

将 $(2,-5,3)$ 代入有 $D=5B$，故方程为 $y=-5$.

(2) 过 z 轴，则 C，D 为 0，故平面方程为 $Ax+By=0$.

将 $(-3,1,-2)$ 代入有 $B=3A$，故方程为 $x+3y=0$.

(3) 平行于 x 轴，则由 $A=0$，将两点代入 $\begin{cases}-2C+D=0,\\ B+7C+D=0.\end{cases}$

有 $D=2C$，$B=-9C$，故平面方程为 $-9y+z+2=0$.

(4) 平行于平面 $x+y+z-1=0$，故所求平面的法向量为 $(1,1,1)$.

同时与原点距离为 3 个单位，故所求平面过点 $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$ 或 $(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

因此，所求平面为 $x+y+z-3\sqrt{3}=0$ 或 $x+y+z+3\sqrt{3}=0$.

13. 求点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离 .

解：由点到平面距离公式得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\times1+1\times1+1\times(-1)+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}.$$

1.4　直线及其方程

1.4.1　知识点概况

1. 直线的方程

(1) 对称式：设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 l 上的一个点，$\boldsymbol{v}=(X, Y, Z)$ 为 l 的一个方向向量，则直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}.$$

(2) 参数式：设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是直线 l 上的一个点，$\boldsymbol{v}=(X, Y, Z)$ 为 l 的一个方向向量，则直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \quad t\in(-\infty, +\infty). \\ z=z_0+Zt, \end{cases}$$

(3) 一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ 其中，A_1，B_1，C_1 与 A_2，B_2，C_2 不成比例.

2. 直线的对称式与一般式的互化

(1)直线方程的一般式转化成对称式

已知直线方程的一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. 其中 A_1，B_1，C_1 与 A_2，B_2，C_2 不成比例，下面将其转化成直线的对称式.

首先我们知道一般式中的两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. 因为 $\boldsymbol{n}_1\perp l$，$\boldsymbol{n}_2\perp l\Rightarrow \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，所以可取

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

为 l 的方向向量. 在直线 l 上任取一点，设为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，于是交线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

(2)直线方程的对称式转化成一般式

已知直线方程的对称式：$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，下面将其转化成直线的一般式.

在对称式中分列两个等号为两个等式，得

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}, \\ \frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \end{cases}$$

整理即可得到直线方程的一般式.

3. 两直线的位置关系

设两条直线 l_1 与 l_2 的方程分别为

l_1：$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}$，方向向量 $\boldsymbol{v}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$，$M_1=(x_1, y_1, z_1)\in l_1$；

l_2：$\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$，方向向量 $\boldsymbol{v}_2=(X_2, Y_2, Z_2)$，$M_2=(x_2, y_2, z_2)\in l_2$.

l_1 与 l_2 有如下位置关系：

(1) l_1 与 l_2 重合$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Leftrightarrow X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2-x_1) : (y_2-y_1) : (z_2-z_1).$$

(2) l_1 与 l_2 平行$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$ 且不平行于$\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Leftrightarrow X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2-x_1) : (y_2-y_1) : (z_2-z_1).$$

(3) l_1 与 l_2 相交$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$共面，且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共线

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0，且 X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2.$$

(4) l_1 与 l_2 异面$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$不共面$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\neq 0.$

其中，当两直线 l_1 与 l_2 相交时，所形成的4个角中，不大于 $\frac{\pi}{2}$ 的那对对顶角 θ 叫做这两条直线的夹角．公式如下：

$$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}.$$

4. 直线与平面的位置关系

设直线 l：$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)$．

平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$．

则 l 与 Π 有如下位置关系：

(1) l 在 Π 上 $\Leftrightarrow\boldsymbol{v}/\!/\Pi$，且 M_0 在 Π 上 $\Leftrightarrow\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 M_0 在 Π 上

$\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$．

(2) $l/\!/\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{v}/\!/\Pi$，且 M_0 不在 Π 上 $\Leftrightarrow\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 M_0 不在 Π 上

$\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0$，且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$．

(3) l 与 Π 相交 $\Leftrightarrow\boldsymbol{v}$ 与 Π 不平行 $\Leftrightarrow AX+BY+CZ\neq0$．

其中，当直线 l 与 Π 相交时，我们常考虑其交角的大小，将直线与它在平面上的投影之间的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角．公式如下：

$$\sin\theta=\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5. 点到直线的距离

设直线 l：$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$，方向向量 $\boldsymbol{v}=(X,Y,Z)$，$M_1=(x_1,y_1,z_1)\in l$，直线外一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，可以得到点 M 到平面 l 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_1M}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_0-y_1 & z_0-z_1\\ Y & Z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_0-z_1 & x_0-x_1\\ Z & X\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_0-x_1 & y_0-y_1\\ X & Y\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

1.4.2　习题解答

1. 求过点 $M_1(1,-1,3)$，$M_2(-1,0,2)$ 的直线方程．

解：$s=\overrightarrow{M_1M_2}=(-2, 1, -1)$，故直线方程为$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

2. 求过点(1，1，1)且与直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$平行的直线方程.

解：与已知直线平行，故方向向量相同，故直线方程为$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$.

3. 求过点(0，2，4)且与两平面 $x+2z=0$，$y-3z=2$ 平行的直线方程.

解：$s=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\dfrac{x-0}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

4. 过点 $M(1, -5, 3)$且与 x，y，z 三轴分别成 $60°$，$45°$，$120°$的直线方程.

解：$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-1}{2}$，

故方向向量为$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$，故直线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+5}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-3}{-1}$.

5. 求过点 $A(2, -3, 4)$且和 y 轴垂直相交的直线方程.

解：过点 A 与 y 轴垂直相交，故过点(0，−3，0)，记为 B.

$s=\overrightarrow{AB}=(-2, 0, -4)$，故直线方程为$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}$.

6. 求过点 $M(1, 0, -2)$且与两直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{0}$垂直的直线方程.

解：与两直线垂直，故与两直线的方向向量都垂直.

可取方向向量为 $s=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

直线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

7. 求过点 $M(2, -3, -5)$且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线方程.

解：平面的法向量即直线的方向向量，所以直线方程为$\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

8. 求过点 $M(0, 1, 0)$且与两平面 $x-2y-1=0$ 和 $y+3z-4=0$ 都平行的直线方程.

解：直线与两平面的法向量都垂直，故直线的方向向量为

$$s=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

直线的方程为$\dfrac{x-0}{-6}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-0}{1}$.

9. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$

解：$s=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，取 $x=1$，代入直线方程$\begin{cases} -y+z=0, \\ y+z=2, \end{cases}$ 解得 $z=1$，　$y=1$.

直线的对称式方程为$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.

设$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}=t$，则直线的参数方程为$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, \\ z=1+3t. \end{cases}$

10. 将直线的对称式方程$\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{4}$化为参数方程和一般方程 .

解：设$\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-6}{4}=t$，直线的参数方程为$\begin{cases} x=-3t-2, \\ y=t+1, \\ z=4t+6. \end{cases}$

一般方程可把对称式方程拆成两个平面方程联立，即

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{1}, \\ \dfrac{z-6}{4}=\dfrac{y-1}{1}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x+3y-1=0, \\ 4y-z+2=0. \end{cases}$$

11. 求过点$\left(\dfrac{5}{2},-1,-1\right)$且与直线$\begin{cases} 4x+3y+2z-1=0, \\ 2x+7y-6z+5=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程。

解：直线的方向向量为平面的法向量，即 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -6 \end{vmatrix}=-32\boldsymbol{i}+28\boldsymbol{j}+22\boldsymbol{k}$.

平面方程为$-32\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+28(y+1)+22(z+1)=0$，即$-32x+28y+22z+130=0$.

12. 求过点(1，2，3)且通过直线$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$的平面方程．

解：平面过直线$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$，故过点(4，−3，0)，根据已知还过点(1，2，3)，故此两点所确定的向量为(3，−5，−3)，平面的法向量同时垂直于此向量及直线的方向向量，即

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & -3 \end{vmatrix}=-22\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}.$$

平面方程为$-22(x-1)-9(y-2)-7(z-3)=0$，即 $22x+9y+7z-61=0$.

13. 求过点 $M(2，1，0)$且与直线$\begin{cases} x=2t-3, \\ y=3t+5, \\ z=t \end{cases}$垂直的平面方程．

解：由直线的参数方程可得对称式方程：$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$. 直线与平面垂直，故直线的方向向量即为平面的法向量，平面方程为 $2(x-2)+3(y-1)+1(z-0)=0$，即 $2x+3y+z-7=0$.

14. 求直线$\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$的夹角的余弦。

解：$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$|\boldsymbol{s}_1|=\sqrt{26}$，

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k},\ |\boldsymbol{s}_2|=15,$$

$$\cos\theta=\frac{3\times10+4\times(-5)+(-1)\times10}{\sqrt{26}\times15}=0.$$

15. 求直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{5}$和直线$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$的夹角．

解：$\boldsymbol{s}_1=(3，4，5)$，$|\boldsymbol{s}_1|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$，

$\boldsymbol{s}_2=(-1，2，2)$，$|\boldsymbol{s}_2|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$，

故 $\cos\theta=\frac{3\times(-1)+4\times2+5\times2}{5\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以夹角为 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

16. 确定下列各组中的直线和平面间的关系：

(1) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{7}=\frac{z}{3}$与 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$与 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$与 $x+y+z=3$；

(4) $\begin{cases}x+y-3z-5=0,\\ -x-y-3z+1=0\end{cases}$ 与 $2x-2y-7=0$；

(5) $\begin{cases}x=3t,\\ y=t+9,\\ z=-4t-4\end{cases}$ 与 $x+y+z-10=0$.

解：(1) 直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线与平面的夹角为 φ 且

$$\sin\varphi=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{7}{\sqrt{93}}.$$

可验证直线上的点代入平面方程不成立，故直线与平面相交.

(2) $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$，$\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$，故直线与平面垂直.

(3) $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，可验证 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且将直线上的点代入平面方程成立，即点在平面上.

(4) $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{n}=(2,-2,0)$，

$\boldsymbol{s}=-3\boldsymbol{n}$，故直线与平面垂直.

(5) $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$，由于直线上的点$(0,-9,4)$不在平面上，故直线与平面平行.

1.5 曲面及其方程

1.5.1 知识点概况

1. 曲面的方程

如果曲面 Σ 与方程 $F(x, y, z)=0$ 满足：

(1) 曲面 Σ 上每一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$；

(2) 以满足方程 $F(x, y, z)=0$ 的解为坐标的点都在曲面 Σ 上.

称方程 $F(x, y, z)=0$ 为曲面 Σ 的方程，称曲面 Σ 为此方程的图形.

2. 球面

设定点 $C(x_0, y_0, z_0)$，定长为 R，则以 C 为球心、以 R 为半径的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

3. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

4. 双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0, b>0, c>0)$所确定的曲面称为单叶双曲面.

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0, b>0, c>0)$所确定的曲面称为双叶双曲面.

5. 抛物面

由方程 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0, c>0)$所确定的曲面称为椭圆抛物面.

由方程 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0, c>0)$所确定的曲面称为双曲抛物面.

6. 柱面

用直线 L 沿空间一条曲线 Γ 平行移动所形成的曲面称为柱面. 动直线 L 称为柱面的母线，定曲线 Γ 称为柱面的准线.

常见的柱面有：

（1）圆柱面：$x^2+y^2=R^2$；

（2）椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

（3）双曲柱面：$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$；

（4）抛物柱面：$x^2=2py$.

7. 旋转曲面

一条平面曲线 Γ 绕同一平面内的一条定直线 L 旋转所形成的曲面称为旋转曲面．曲线 Γ 称为旋转曲面的母线，定直线 L 称为旋转曲面的旋转轴．

设母线 Γ 在 yOz 平面上，它的平面直角坐标方程为 $F(y,z)=0$，则 Γ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面 Σ 的方程为 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

1.5.2　习题解答

1. 一动点移动时，与点 $A(4,0,0)$ 及 xOy 平面等距离，求该动点的轨迹方程．

解：设动点 $M(x,y,z)$，依题意有

$\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{z^2}$，

解得 $(x-4)^2+y^2=0$.

2. 一动点到 x 轴的距离与它到点 $(1,2,0)$ 的距离相等，求动点的轨迹方程，并指出是何种曲面．

解：设动点 $M(x,y,z)$，依题意有

$\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2}$，

解得 $x^2-2x-4y+5=0$，是一母线平行于 z 轴的抛物柱面．

3. 求下列各球面的方程：

（1）球心 $(2,-1,3)$，半径为 $R=6$；

（2）球心在原点，且经过点 $(6,-2,3)$；

（3）一条直径的两端点是 $(2,-3,5)$ 与 $(4,1,-3)$；

（4）通过原点与点 $(4,0,0)$，$(1,3,0)$，$(0,0,-4)$.

解：（1）$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$；

（2）$x^2+y^2+z^2=49$；



(3) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$;

(4) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$.

4. 求下列旋转曲面的方程:

(1) 将 xOy 坐标平面上的抛物线 $y^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解: $y^2+z^2=5x$.

(2) 将 zOx 平面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解: 绕 x 轴所生成的旋转曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$.

绕 z 轴所生成的旋转曲面$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

(3) 将 xOy 平面上的曲线 $4x^2-16y^2=100$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解: 绕 x 轴所生成的旋转曲面 $4x^2-16y^2-16z^2=100$.

绕 y 轴所生成的旋转曲面 $4x^2+4z^2-16y^2=100$.

5. 指出下列曲面哪些是旋转曲面? 如果是旋转曲面，说明它是如何产生的.

(1) $x^2+y^2+z^2=1$;

解: 球面，$x^2+y^2=1$ 绕 x 或 y 轴旋转所生成的旋转曲面，$y^2+z^2=1$ 绕 y 轴或 z 轴旋转所生成的旋转曲面，$x^2+z^2=1$ 绕 x 轴或 z 轴所生成的旋转曲面.

(2) $x^2+2y^2+3z^2=1$;

解: 不是旋转曲面，为单叶双曲面.

(3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$;

解: $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面，或$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面.

(4) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

解: $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面，或 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面.

(5) $x^2-y^2-z^2=1$;

解: $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面，或 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面.

(6) $x^2+y^2-2z=0$.

解：$y^2-2z=0$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面，或 $x^2-2z=0$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面．

6. 指出下列方程在平面直角坐标系和空间直角坐标系中分别表示什么图形：

（1）$y=5x$；　　（2）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$；

（3）$x^2-y^2=1$；　　（4）$y^2=4x$.

解：（1）$y=5x$ 在平面直角坐标系中表示过原点的直线，在空间直角坐标系中表示过 z 轴的平面．

（2）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 在平面直角坐标系中表示椭圆，在空间直角坐标系中表示椭圆柱面．

（3）$x^2-y^2=1$ 在平面直角坐标系中表示双曲线，在空间直角坐标系中表示双曲柱面．

（4）$y^2=4x$ 在平面直角坐标系中表示抛物线，在空间直角坐标系中表示抛物柱面．

7. 指出下列曲面的名称，并作图：

（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$；

解：母线平行于 z 轴的椭圆柱面，图略．

（2）$y^2=2z$；

解：母线平行于 x 轴的抛物柱面，图略．

（3）$x^2+y^2+z^2-2x=1$；

解：球心在(1，0，0)，半径为 1 的球，图略．

（4）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{3}=1$；

解：$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ 或$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转曲面，图略．

8. 画出下列各曲面所围成的立体图形：

（1）$3x+4y+2z-12=0$ 与三个坐标面所围成；

（2）$2y^2=x$，$x+y+z=1$，$z=0$ 所围成；

（3）$x^2+y^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$；

（4）$z=0$，$z=a(a>0)$，$y=x$，$x^2+y^2=1$ 及 $x=0$ 在第一卦限部分；

（5）$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=ax$，$z=0$，$(a>0)$；

（6）$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2=2x$，$z=0$.

解：略．

1.6 曲线及其方程

1.6.1 知识点概况

1. 曲线的方程

(1) 一般式：设曲面 Σ_1 的方程为 $F_1(x, y, z)=0$，曲面 Σ_2 的方程为 $F_2(x, y, z)=0$，则满足方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0 \end{cases}$$

的点的轨迹叫做曲线，该方程称为曲线的方程.

(2) 参数式：$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$

2. 空间曲线在坐标面上的投影

对一般的空间曲线 Γ，以 Γ 为准线，作母线平行于 z 轴的柱面 Σ_z，称 Σ_z 与 xOy 平面的交线 L_z 为 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线(简称投影)，称柱面 Σ_z 为 Γ 关于 xOy 平面的投影柱面.

1.6.2 习题解答

1. 指出下列方程所表示的曲线的形状.

(1) $\begin{cases} 3x^2+y^2=z, \\ y=3. \end{cases}$

解：表示平面 $y=3$ 上的抛物线 $3x^2+9=z$.

(2) $\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=30, \\ z=1. \end{cases}$

解：表示平面 $z=1$ 上的椭圆 $x^2+4y^2=21$.

(3) $\begin{cases} x^2-4y^2+z^2=25, \\ x=-3. \end{cases}$

解：表示平面 $x=-3$ 上的双曲线 $-4y^2+z^2=16$.

(4) $\begin{cases} y^2+z^2-4x+8=0, \\ y=4. \end{cases}$

解：表示平面 $y=4$ 上的抛物线 $z^2-4x+24=0$.

(5) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x-2=0. \end{cases}$

解：表示平面 $x=2$ 上的双曲线 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

2. 求下列曲线关于 xOy 平面的投影方程.

(1) $\begin{cases} y^2+z^2-2x=0, \\ z=3. \end{cases}$

解：$\begin{cases} y^2=2x-9, \\ z=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1. \end{cases}$

解：$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+z+1=0. \end{cases}$

解：$\begin{cases} x^2+y^2-x-1=0, \\ z=0. \end{cases}$

3. 求曲线 $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影曲线方程 .

解：在 xOy 平面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=x+y, \\ z=0. \end{cases}$

在 yOz 平面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0. \end{cases}$

在 xOz 平面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0. \end{cases}$

4. 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标平面上的投影方程.

解: 在 xOy 平面上的投影曲线方程为$\begin{cases}x^2+5y^2+4xy-x=0,\\ z=0.\end{cases}$

在 yOz 平面上的投影曲线方程为$\begin{cases}y^2+z^2+2y-z=0,\\ x=0.\end{cases}$

在 xOz 平面上的投影曲线方程为$\begin{cases}x^2+5z^2-2xz-4x=0,\\ y=0.\end{cases}$

5. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围成的立体在三个坐标平面上的投影.

解: 在 xOy 平面上的投影为$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$

在 yOz 平面上的投影为$\begin{cases}\left(\dfrac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\leqslant 1,\ z\geqslant 0,\\ x=0.\end{cases}$

在 xOz 平面上的投影为$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant z\leqslant \sqrt{2x},\\ y=0.\end{cases}$

6. 求曲面 $z=\sqrt{6-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=z$ 所围的立体在 xOy 平面上的投影.

解: $\begin{cases}z=\sqrt{6-x^2-y^2},\\ x^2+y^2=z,\end{cases}$ 可得投影$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ z=0.\end{cases}$

7. 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成,求它在 xOy 面上的投影.

解: $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)},\end{cases}$ 可得投影$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$

8. 求螺旋线$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=b\theta\end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解: 由 $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, 得 $x^2+y^2=a^2$, 故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0.\end{cases}$

由 $y=a\sin\theta$, $z=b\theta$, 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$, 故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程

为$\begin{cases} y=a\sin\dfrac{z}{b}, \\ x=0. \end{cases}$

由 $x=a\cos\theta$，$z=b\theta$，得 $x=a\cos\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程

为$\begin{cases} x=a\sin\dfrac{z}{b}, \\ y=0. \end{cases}$

9. 化曲线$\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t, \\ z=a\sin 2t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$为一般方程.

解：一般方程为$\begin{cases} x+y=a, \\ 4xy=z^2. \end{cases}$

10. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

解：将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，可得 $(x-1)^2+y^2=3$，取 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则 $y=\sqrt{3}\sin t$，从而可得该曲线的参数方程$\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sqrt{3}\sin t, \\ z=0, \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x. \end{cases}$

解：将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得 $2x^2+z^2=9$，取 $x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t$，则 $z=3\sin t$，可得该曲线的参数方程$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ z=3\sin t, \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

1.7 总习题解答

1. 在正确的结论后打对号，在错误的结论后打叉号.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$； (　　)

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$； (　　)

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$； (　　)

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. (　　)

解：(1) 错；　(2) 错；　(3) 错；　(4) 对 .

2. 填空题

(1) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(5,-1,1)$，则向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 在 y 轴上的投影向量是________；

(2) 若 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________；

(3) 已知 $A(1,0,1)$，$B(2,3,-1)$，$C(-1,2,0)$，则三角形 ABC 的面积为________；

(4) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$________；

(5) 已知原点到平面 $2x-y+kz-6=0$ 的距离等于 2，则 k 的值为________；

(6) 与平面 $x-y+2z-6=0$ 垂直的单位向量为________；

(7) 过点$(-3,1,-2)$和$(3,0,5)$且平行于 x 轴的平面方程为________；

(8) 过原点且垂直于平面 $2y-z+2=0$ 的直线为________.

解：(1) $9\boldsymbol{j}$；　(2) $\sqrt{2}$，0 ；　(3) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$；　(4) 3；　(5) ±2；　(6) $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2)$；

(7) $7y+z-5=0$；　(8) $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=-z$.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；　(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$.

解：(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$；

(2) $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-5,0)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-1,3)$，

$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7$；

(3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-3,-1)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=10$.

4. 已知向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点为$P_1(2,-2,5)$，终点为$P_2(-1,4,7)$，试求：

(1) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标表示； (2) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模；

(3) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦； (4) 与向量$\overrightarrow{P_1P_2}$方向一致的单位向量.

解：(1) $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,6,2)$；

(2) $|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}=7$；

(3) $\cos\alpha=-\frac{3}{7}$， $\cos\beta=\frac{6}{7}$，$\cos\gamma=\frac{2}{7}$；

(4) $\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}=\frac{1}{7}(-3,6,2)$.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{6}$，且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

解：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=7$，

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=1$，

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=2$，

故夹角的余弦为$\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}}$，故夹角为 $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

6. 求一向量 $\boldsymbol{p}$，使 $\boldsymbol{p}$ 满足下面三个条件：

(1) $\boldsymbol{p}$ 与 z 轴垂直；

(2) $\boldsymbol{a}=(3,-1,5)$， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=9$；

(3) $\boldsymbol{b}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=-4$.

解：设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$， z 轴的单位向量$(0,0,1)$，故 $x\cdot0+y\cdot0+z\cdot1=0$，故 $z=0$.

由 $\boldsymbol{a}=(3,-1,5)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=9$，有 $3x-y=9$.

由 $\boldsymbol{b}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=-4$，有 $x+2y=-4$.

解得 $x=2$，$y=-3$，所以 $\boldsymbol{p}$ 为$(2,-3,0)$.

7. 求满足下列条件的平面方程：

(1) 过三点 $P_1(0,1,2)$，$P_2(1,2,1)$，$P_3(3,0,4)$；

解：$\overrightarrow{P_1P_2}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{P_1P_3}=(3,-1,2)$，

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\3&-1&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},$$

故平面方程为 $x-5y-4z+13=0$.

(2) 过 x 轴且与平面 $\sqrt{5}x+2y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

解: 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，过 x 轴，所以方程为 $By+Cz=0$，法向量为 $(0, B, C)$，有 $\frac{|\sqrt{5}\cdot 0+2\times B+1\times C|}{\sqrt{10}\times\sqrt{B^2+C^2}}=\frac{1}{2}$，解得 $B=\frac{C}{3}$ 或 $B=-3C$，故平面方程为 $\frac{y}{3}+z=0$ 或 $-3y+z=0$.

8. 一平面过直线 $\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 垂直，求该平面方程.

解: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -5 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}=-36\boldsymbol{i}-45\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}$.

平面过直线，故任取直线上的一点也在平面上，取 $\left(0, -\frac{4}{5}, 4\right)$，可得平面方程为 $4x+5y-2z+12=0$.

9. 求通过点 $A(3, 0, 0)$ 和 $B(0, 0, 1)$，且与平面 Π: $x+y+z=1$ 垂直的平面方程.

解: $\overrightarrow{AB}=(-3, 0, 1)$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，故平面方程为 $x-4y+3z-3=0$.

10. 求既与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，又过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线方程.

解: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，故直线方程为 $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$.

11. 一直线过点 $A(-1, 0, 4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又和直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交，求该直线方程.

解: 设所求方程为 $\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}$，所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，故有

$$3m-4n+p=0. \quad ①$$

又所求直线与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交，故有 $\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$，即

$$10m-4n-3p=0. \tag{②}$$

由式①和②可得$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{z-4}{28}$，所求直线方程为$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

12. 指出下列方程表示的图形名称：

(1) $x^2+4y^2+z^2=1$；　(2) $x^2+z^2=2z$；　(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

(4) $x^2-y^2=0$；　(5) $x^2-y^2=1$；　(6) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2. \end{cases}$

解：(1) 绕 y 轴旋转的旋转椭球面；

(2) 绕 z 轴旋转的旋转抛物面；

(3) 绕 z 轴旋转的锥面；

(4) 母线平行于 z 轴的两垂直平面：$x=y$，$x=-y$；

(5) 母线平行于 z 轴的双曲柱面；

(6) 旋转抛物面被平行于 xOy 面的平面截得的圆，半径为$\sqrt{2}$，圆心在$(0, 0, 2)$处.

第2章　多元函数微分法及其应用

多元函数微分学是一元函数微分学的推广，两者有相似之处，又有一些本质的差异．本章的重点知识是多元函数的极限、连续、偏导数及全微分的概念及其它们之间的关系，特别是各种函数的有关偏导数及全微分的计算、求空间曲线的切线和法平面，空间曲面的切平面和法线．最后讨论了多元函数的极值、方向导数和梯度．

2.1　多元函数的极限与连续性

2.1.1　知识点概况

1. 多元函数

(1) 定义：设有三个变量 x，y 和 z. 如果当变量 x，y 在一定范围内任意取定一对数值时，变量 z 按照一定的规律 f 总有确定的数值与它们对应，则称 z 是二元函数，记为

$$z=f(x,y).$$

(2) 几何表示：空间曲面．

2. 二元函数的极限

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域有定义，如果当点 (x,y) 以任意方式趋向点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋向于一个确定的常数 A，那么就称 A 是二元函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

二元函数极限的 ε - δ 定义：二元函数 $z=f(x,y)$ 在某 $\mathring{U}(P_0,\delta_0)$ 有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 $\delta(\delta<\delta_0)$，使得当点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta_0)$ 时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 称为当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

3. 二元函数的连续性

(1) 定义函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续. 如果 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域上连续.

(2) 闭区域连续函数性质

① 最大值、最小值定理：在有界闭区域上连续的二元函数一定有界，且能取得最大值和最小值.

② 介值定理：在有界闭区域上连续的二元函数必能取得介于最大值和最小值之间的任何值.

2.1.2 习题解答

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、无界集，并指出集合的边界.

(1) $\{(x,y)\,|\,x\neq 0,\ y\neq 0\}$;

(2) $\{(x,y)\,|\,1<x\leqslant y^2\leqslant 4\}$;

(3) $\{(x,y)\,|\,y>x^2\}$;

(4) $\{(x,y)\,|\,x^2+(y-1)^2\geqslant 1,\ x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

解: (1) 集合是开集、无界集，边界为 $\{(x,y)\,|\,x=0$ 或 $y=0\}$;

(2) 集合即非开集又非闭集，是有界集，边界为 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\}$;

(3) 集合是开集、无界集，边界为 $\{(x,y)\,|\,y=x^2\}$;

(4) 集合是闭集、有界集，边界为 $\{(x,y)\,|\,x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\,|\,x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 若 $f(x,y)=\dfrac{x-2y}{2x-y}$，求 $f(2,1)$ 和 $f(3,-1)$.

解: $f(2,1)=\dfrac{2-2\times 1}{2\times 2-1}=0$，$f(3,-1)=\dfrac{5}{7}$.

3. 若 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f(1,\dfrac{y}{x})$.

解：$f(1, \frac{y}{x})=\dfrac{2\times1\times\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

4. $f(x)=x^2+x$，$g(x, y)=xy$，$h(x)=x+1$，求 $f[g(1, 2)]$ 及 $g[f(1), h(2)]$.

解：$f[g(1, 2)]=f[1\times2]=6$，$g[f(1), h(2)]=f(1)\cdot f(2)=12$.

5. 已知函数 $f(u, v)=u^v$，试求 $f(x-y, x+y)$.

解：$f(x-y, x+y)=(x-y)^{x+y}$.

6. 设 $f(x, y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$，证明：$f(tx, ty)=t^2f(x, y)$.

证明：$f(tx, ty)=\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}-2tx\cdot ty=t^2f(x, y)$.

7. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；

(2) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；

(3) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(4) $\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(5) $z=\dfrac{1}{x+1}+2\ln(x-\sqrt{y})$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：(1) $\{(x, y)\mid y^2-2x+1>0\}$；

(2) $\{(x, y)\mid |y|\leqslant|x|, x\neq0\}$；

(3) $\{(x, y)\mid y>x\geqslant0, x^2+y^2<1\}$；

(4) $\{(x, y)\mid x\geqslant0, y\geqslant0, x^2\geqslant y\}$；

(5) $\{(x, y)\mid x^2>y\geqslant0\}$；

(6) $\{(x, y)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant0, x^2+y^2\neq0\}$.

8. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\dfrac{\sin xy}{x}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2+1)}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y^2}{1-\cos(xy)}$.

解：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}=2$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=2$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=2$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot y}=\mathrm{e}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{1-\cos(xy)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{\frac{1}{2}(xy)^2}=2.$

9. 证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}$不存在.

证明：设(x,y)沿$y=kx$趋近于$(0,0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+kx}{x-kx}=\frac{1+k}{1-k}$，极限不确定，故极限不存在.

10. 求下列函数的不连续点(间断点)：

(1) $f(x,y)=\frac{y+2x-1}{x^2+y^2-2x}$；　　(2) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$；

(3) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(4) $f(x,y)=\frac{1}{x+y}+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：(1) 间断点集为$\{(x,y)\mid x^2+y^2-2x=0\}$；

(2) 间断点集为$\{(x,y)\mid x^2+y^2=0\}$；

(3) 间断点集为$\{(x,y)\mid x^2+y^2=0\}$；

(4) 间断点集为$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x=-y\}$.

2.2 偏导数

2.2.1 知识点概况

1. 偏导数

(1) 定义：设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时，相应地函数有改变量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或 } f_x(x_0,y_0).$$

类似地，当 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有改变量 Δy，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或 } f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点(x,y)处对 x 的偏导数都存在，这个偏导数仍是 x，y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$对自变量 x 的偏导函数(也简称偏导数)，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x\text{ 或 } f_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$对自变量 y 的偏导函数(也简称偏导数)，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y\text{ 或 } f_y(x,y).$$

(2) 几何意义：二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数，实际上就是一元函数 $z=f(x,y_0)$及 $z=f(x_0,y)$分别在点 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 处的导数，因此二元函数 $f(x,y)$的偏导数的几何意义也是曲线切线的斜率.

2. 高阶偏导数

函数 $z=f(x, y)$的两个偏导函数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$一般来说仍然是 x,y 的函数，如果这两个函数关于 x，y 的偏导数也存在，则称它们的偏导数是 $z=f(x, y)$的二阶偏导数．

二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.

2.2.2 习题解答

1. 设 $z=f(x, y)$在(x_0, y_0)处的偏导数分别为 $f_x(x_0, y_0)=A$，$f_y(x_0, y_0)=B$，问下列极限是什么？

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0)-f(x_0, y_0-h)}{h}$;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0+2h)-f(x_0, y_0)}{h}$;

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0-h, y_0)}{h}$.

解：(1) A；(2) B；(3) $2B$；(4) $2A$.

2. 设函数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 试用偏导数定义计算 $f_x(0, 0)$，$f_y(0, 0)$.

解：当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x(x, y)=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$，$f_y(x, y)=\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

当 $x^2+y^2=0$ 时，$f_x(0, 0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x, 0)-f(0, 0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$.

同理，$f_y(0, 0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0, 0+\Delta y)-f(0, 0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=0$.

故 $f_x(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $f_y(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

3. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;

(2) $z=x^3y-y^3x$;

(3) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;

(4) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;

(5) $z=e^{xy}$；　　(6) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(7) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；　　(8) $z=\sec(xy)$；

(9) $z=(1+xy)^y$；　　(10) $u=\arctan(x-y)^z$；

(11) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(12) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

解：(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$；

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$；

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$；

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}[\ln(xy)]^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}[\ln(xy)]^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot x=\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$；

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot y-ye^{xy}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\cdot x-xe^{xy}$；

(6) $\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{2u\cdot uv-(u^2+v^2)v}{(uv)^2}=\dfrac{u^2v-v^3}{u^2v^2}$；$\dfrac{\partial s}{\partial v}=\dfrac{2v\cdot uv-(u^2+v^2)u}{(uv)^2}=\dfrac{v^2u-u^3}{u^2v^2}$；

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y=y\cos(xy)-y\sin(2xy)$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x=x\cos(xy)-x\sin(2xy)$；

(8) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\sec(xy)\cdot\tan(xy)$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\sec(xy)\cdot\tan(xy)$；

(9) 两边取对数：$\ln z=y\ln(1+xy)$.

两边对 x 求导得$\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\dfrac{y}{1+xy}$，故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2}{1+xy}\cdot(1+xy)^y$.

两边对 y 求导得$\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+y\cdot\dfrac{x}{1+xy}$，故$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right](1+xy)^y$；

(10) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z\cdot(x-y)^{z-1}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot(x-y)^z\cdot\ln(x-y)=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot(x-y)^z\cdot\ln(x-y)=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$;

(11) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}}\ln\frac{y}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln\frac{y}{z}$;

(12) $\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{y}=\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot(-\frac{x}{y^2})=-\frac{xz}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$.

4. 曲线$\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$在点(2，4，5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解： 设 $z=f(x,y)$，按偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$就是曲线在点(2，4，5)处的切线对于 x 轴的斜率，而 $f_x(2,4)=1$，故倾角为 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

5. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

证明： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}+y}$,

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2(x+\sqrt{xy})}+\frac{y}{2(y+\sqrt{xy})}=\frac{1}{2}$.

6. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解： $f_x(x,y)=1+(y-1)\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}=1+(y-1)\frac{1}{2x\sqrt{y-x}}$，故 $f_x(x,1)=1$.

7. 设 $f(x,y)=\int_y^x e^{-t^2}dt$，求 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$.

解： $f_x(x,y)=e^{-x^2}$，$f_y(x,y)=\frac{\partial(-\int_x^y e^{-t^2}dt)}{\partial y}=-e^{-y^2}$.

8. 设 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

证明： $\frac{\partial z}{\partial x}=y+e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=x+e^{\frac{y}{x}}$，

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}\right]+y(x+e^{\frac{y}{x}})=xy+xy+xe^{\frac{y}{x}}=xy+z.$

9. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=x\sin(x+y)+y\cos(xy)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)-y^2\sin(xy)$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y)+\cos(xy)-xy\sin(xy)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos(x+y)+\cos(x+y)-x\sin(x+y)-y^3\cos(xy)$$

$$=2\cos(x+y)-x\sin(x+y)-y^3\cos(xy)，$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin(x+y)-2x\sin(xy)-xy\cos(xy)$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)-2y\sin(xy)-xy^2\cos(xy)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$

(2) $z=y^{\ln x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=y^{\ln x}\cdot\ln y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ln x\cdot y^{(\ln x-1)}\cdot\ln y+y^{\ln x}\cdot\frac{1}{y}=y^{(\ln x-1)}(\ln x\cdot\ln y+1).$

(3) $z=y^x$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\ln y\cdot y^x\ln y=[\ln y]^2y^x$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xy^{x-1}\cdot\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=xy^{x-1}\ln y+y^{x-1}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$

(4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

(5) $z=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}，\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}，\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

(6) $z=x^4+y^4-4x^2y$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2，\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2，\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=16xy=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

10. $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}$，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}+\mathrm{e}^{-x}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\sin\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}=-3\pi^2\mathrm{e}^{-2}.$$

11. 验证：$z=2\cos^2\left(x-\frac{t}{2}\right)$满足方程 $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.

证明： $\frac{\partial z}{\partial t}=4\cos\left(x-\frac{t}{2}\right)\left[-\sin(s-\frac{t}{2})\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\sin(2x-t)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\cos(2x-t)，\frac{\partial z}{\partial x}=-2\sin(2x-t)，\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=2\cos(2x-t),$$

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=2\cdot[-\cos(2x-t)+2\cos(2x-t)]=0.$$

12. 验证：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足方程$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证明： $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{r}$.

13. 设 $z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\ln(xy)+1$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}$.

14. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解： $f_x=y^2+2xz$，$f_y=2xy+z^2$，$f_z=2yz+x^2$，

$f_{xx}=2z$，$f_{xz}=2x$，$f_{yz}=2z$，$f_{zz}=2y$，$f_{zzx}=0$，

$f_{xx}(0,0,1)=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2$，$f_{yz}(0,-1,0)=0$，$f_{zzx}(2,0,1)=0$.

2.3 全微分

2.3.1 知识点概况

1. 全微分

(1) 定义：设有二元函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)某邻域有定义，如果函数在点(x,y)的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为关于 Δx，Δy 的线性函数与一个比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$高阶的无穷小之和，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

其中，A，B 与 Δx，Δy 无关，只与 x，y 有关，$o(\rho)$是当 $\rho\to 0$ 时比 ρ 高阶的无穷小，则称二元函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

(2) 可微的必要条件：如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$存在.

(3) 可微的充分条件：若 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的两个偏导数连续，则 $z=f(x,y)$在该点一定可微.

2. 全微分在近似计算中的应用

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$，当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$\Delta z\approx \mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

2.3.2 习题解答

1. 求下列函数的全微分.

(1) $z=\frac{x}{y}$；　　(2) $z=\sin(x^2+y^2)$；

(3) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(4) $z=\frac{x+y}{x-y}$；

(5) $z=e^{\frac{y}{x}}$；　　　　(6) $z=\arcsin\frac{x}{y}(y>0)$；

(7) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；　　　　(8) $u=x^{yz}$.

解：(1) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy$；

(2) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2x\cos(x^2+y^2)dx+2y\cos(x^2+y^2)dy$；

(3) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dx+[(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}-y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}]dy$；

(4) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy$；

(5) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}dx+\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}dy$；

(6) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dx-\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dy$；

(7) $dz=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}dy+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}dz$；

(8) $dz=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$.

2. 求下列函数的全微分.

(1) $z=\ln(1+x^2+y^2)$在 $x=1$，$y=2$ 处的全微分；

解：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$，$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$.

(2) $z=\arctan\frac{x}{1+y^2}$在 $x=1$，$y=1$ 处的全微分；

解：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1+y^2}{(1+y^2)^2+x^2}dx-\frac{2xy}{(1+y^2)^2+x^2}dy$，$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{2}{5}dx-\frac{2}{5}dy$.

3. 求函数 $z=\frac{y}{x}$当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy$，$dz\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-\frac{1}{4}dx+\frac{1}{2}dy$，

$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时，$dz=-\frac{1}{8}$.

4. 求函数 $z=e^{xy}$当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$ 时的全增量和全微分.

解：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=e^{xy}\cdot ydx+e^{xy}\cdot xdy$，$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=edx+edy$，

$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$ 时 $\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}}{4}$.

5. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值.

解： $\Delta z\approx \mathrm{d}z=yx^{y-1}\Delta x+x^{y}\ln y\Delta y$，取 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=-0.03$， $\Delta y=0.05$，可得 $(1.97)^{1.05}\approx 2.039$.

2.4　多元复合函数微分法

2.4.1　知识点概况

1. 复合函数微分法

（1）一元函数与多元函数复合：若一元函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 在点 x 可导，二元函数 $z=f(u, v)$ 在对应的点 (u, v) 可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x), \psi(x)]$ 在点 x 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x};$$

（2）多元函数与多元函数复合：若二元函数 $u=\varphi(x, y)$ 及 $v=\psi(x, y)$ 在点 (x, y) 对 x 及 y 偏导数存在，函数 $z=f(u, v)$ 在对应的点 (u, v) 可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. 复合函数的全微分形式不变性

设函数 $z=f(u,v)$ 可微，则有全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

无论 u、v 是自变量还是中间变量，函数 $z=f(u,v)$ 的全微分形式是一样的，这个性质叫做全微分形式不变形.

2.4.2　习题解答

1. 设 $u=\mathrm{e}^{x-2y}$，　$x=\sin t$，　$y=t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解： $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x-2y}\cos t+\mathrm{e}^{x-2y}\cdot(-2)3t^2=\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

2. 设 $z=\arctan(x, y)$，而 $y=\mathrm{e}^x$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解： $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}e^x=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$.

3. 设 $z=u^2v-uv^2$， $u=x\cos y$， $v=x\sin y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(2uv-v^2)\cos y+(u^2-2uv)\sin y$

$=3x^2\cos^2 y\sin y-3x^2\sin^2 y\cos y$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=(2uv-v^2)(-x\sin y)+(u^2-2uv)x\cos y$

$=2x^3\cos y\sin^2 y+x^3\sin^3 y+x^3\cos^3 y=-2x^3\cos^2 y\sin y$.

4. 设 $z=u^2\ln v$，$u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3$

$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$

$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$.

5. 设 $z=f(u,x,y)=\ln(u^2+y\sin x)$，$u=e^{x+y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$

$=\frac{2u}{u^2+y\sin x}\cdot e^{x+y}+\frac{y\cos x}{u^2+y\sin x}$

$=\frac{2e^{2(x+y)}+y\cos x}{e^{2(x+y)}+y\sin x}$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}$

$=\frac{2u}{u^2+y\sin x}\cdot e^{x+y}+\frac{\sin x}{u^2+y\sin x}$

$=\frac{2e^{2(x+y)}+\sin x}{e^{2(x+y)}+y\sin x}$.

6. 设 $z=f(x,y,t)=x^2-y^2+t$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，求$\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}=2x\cos t+(-2y)(-\sin t)+1=2\sin 2t+1.$$

7. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v$，$y=u-v$，验证：$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

证明： $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}-\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y+x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{y-x}{x^2+y^2}+\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{2(u-v)}{(u+v)^2+(u-v)^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$；

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$.

(2) $u=f\left(x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}\right)$；

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1-\frac{1}{x^2}f'_2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'_1+f'_2$.

(3) $u=f(x, xy, xyz)$；

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3$，$\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3$，$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3$.

(4) $u=f(x^2-y^2, e^{xy}, \ln x)$.

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2+\frac{1}{x}f'_3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$.

9. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，$F(u)$为可导函数，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

证明： $\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\cdot\frac{1}{x}=x+F'(u),$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xF(u)-yF'(u)+xy+yF'(u)=z+xy.$$

10. $u=f(x, y)$，$x=e^s\cos t$，$y=e^s\sin t$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

解： $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=f'_1\mathrm{e}^s\cos t+f'_2\mathrm{e}^s\sin t$,

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=f'_1(-\mathrm{e}^s\sin t)+f'_2\mathrm{e}^s\cos t$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=(f''_{11}\mathrm{e}^s\cos t+f''_{12}\mathrm{e}^s\sin t)\mathrm{e}^s\cos t+f'_1\mathrm{e}^s\cos t+(f''_{21}\mathrm{e}^s\cos t+f''_{22}\mathrm{e}^s\sin t)\mathrm{e}^s\sin t+f'_2\mathrm{e}^s\sin t$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f''_{11}\mathrm{e}^{2s}\sin^2 t-f''_{12}\mathrm{e}^{2s}\sin t\cos t-f'_1\mathrm{e}^s\cos t-f''_{21}\mathrm{e}^{2s}\sin t\cos t+f''_{22}\mathrm{e}^{2s}\cos^2 t-f'_2\mathrm{e}^s\sin t$.

2.5　隐函数的求导及偏导公式

2.5.1　知识点概况

1. 一元隐函数求导公式：设方程 $F(x, y)=0$ 确定了函数 $y=y(x)$，若 $F_y\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

2. 多元隐函数求偏导公式：设方程 $F(x, y, z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x, y)$，若 F_x，F_y，F_z 连续，且 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

2.5.2　习题解答

1. $xe^y+ye^x=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：设 $z=xe^y+ye^x$，$\frac{\partial z}{\partial x}=e^y+ye^x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^y+e^x$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{e^y+ye^x}{xe^y+e^x}.$$

2. $x^y=y^x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：设 $z=x^y-y^x$，$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}-y^x\ln y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x-xy^{x-1}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}.$$

3. $\cos y+e^x-x^2y=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：设 $z=\cos y+e^x-x^2y$，$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x-2xy$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y-x^2$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{\mathrm{e}^x-2xy}{\sin y+x^2}.$$

4. $x+2y-2\sqrt{xyz}=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x, y, z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$，

$F_x=1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{yz}{\sqrt{xyz}}=\frac{\sqrt{xyz}-yz}{\sqrt{xyz}}$，$F_y=2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{xz}{\sqrt{xyz}}=\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{\sqrt{xyz}}$，

$F_z=1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{xy}{\sqrt{xyz}}=\frac{\sqrt{xyz}-xy}{\sqrt{xyz}}$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\sqrt{xyz}-yz}{\sqrt{xyz}-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{\sqrt{xyz}-xy}$.

5. $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x, y, z)=\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z$，

$F_x=-\sin2x$，$F_y=-\sin2y$，$F_z=-\sin2z$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\sin2x}{\sin2z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\sin2y}{\sin2z}$.

6. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：$F_x=\frac{1}{z}$，$F_y=-\frac{1}{y}$，$F_z=-\frac{x+z}{z^2}$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

7. 设 $z=z(x, y)$由方程 $\mathrm{e}^z-xy^2z^3=1$ 确定，试求 $z_x\big|_{(1,1,0)}$，$z_y\big|_{(1,1,0)}$.

解：设 $F(x, y, z)=\mathrm{e}^z-xy^2z^3-1$，$F_x=-y^2z^3$，$F_y=-2xyz^3$，$F_z=\mathrm{e}^z-3xy^2z^2$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y^2z^3}{\mathrm{e}^z-3xy^2z^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2xyz^3}{\mathrm{e}^z-3xy^2z^3}$，

故$z_x\big|_{(1,1,0)}=0$，$z_y\big|_{(1,1,0)}=0$.

8. 设 $z=z(x, y)$由 $2z+y^2=\int_0^{z+y-x}\cos t^2\,\mathrm{d}t$ 所确定，试求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

解：设 $F(x, y, z)=2z+y^2-\int_0^{z+y-x}\cos t^2\,\mathrm{d}t$，

$F_x=-\cos(z+y-x)^2$，$F_z=2-\cos(z+y-x)^2$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\cos(z+y-x)^2}{\cos(z+y-x)^2-2}.$$

9. 设 $z=z(x, y)$ 由方程 $xy\sin z=2z$ 所确定，求全微分 $\mathrm{d}z$.

解： 设 $F(x, y, z)=xy\sin z-2z$，$F_x=y\sin z$，$F_y=x\sin z$，$F_z=xy\cos z-2$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{y\sin z}{xy\cos z-2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{x\sin z}{xy\cos z-2},$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{y\sin z}{2-xy\cos z}\mathrm{d}x+\frac{x\sin z}{2-xy\cos z}\mathrm{d}y.$$

10. 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解： 设 $F(x, y, z)=\mathrm{e}^z-xyz$，$F_x=-yz$，$F_y=-xz$，$F_z=\mathrm{e}^z-xy$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{\mathrm{e}^z-xy},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2z\mathrm{e}^z-2xy^3z-y^2z^2\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z-xy}.$$

11. 求由方程组$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$所确定的函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解： 分别在两个方程两端对 x 求导得：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\\ 2x+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$$

整理可得：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{3z+1}$.

2.6 偏导数的应用

2.6.1 知识点概况

1. 空间曲线的切线及法平面

若曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$$

则曲线在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处切线方程为

$$\frac{X-x_0}{x'(t_0)}=\frac{Y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{Z-z_0}{z'(t_0)},$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

2. 曲面的切平面与法线

设曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z)=0$，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 Σ 上的一点，则曲面 Σ 在点 M_0 的切平面方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0.$$

曲面 Σ 在点 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

若曲面 Σ 的方程由显函数 $z=f(x, y)$ 表示，则其等价形式为 $f(x, y)-z=0$.

令 $F(x, y, z)=f(x, y)-z$，则 $F_x=f_x$，$F_y=f_y$，$F_z=-1$.

因此，曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

曲面 Σ 在点 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

2.6.2　习题解答

1. 求曲面 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 处的一个法向量.

解：$F(x, y, z)=z-\sin x\sin y\sin(x+y)$，

$F_x=\cos x\sin y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)$，

$F_y=\sin x\cos y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y)$，

$F_z=-1$，

$F_x\Big|_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{3}{4}$，$F_y\Big|_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{1}{4}$，$F_z\Big|_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}=-1$，

故法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -1\right)$.

2. 求下列曲线在拐点处的切线方程和法平面方程：

(1) $x=t^2$，$y=1-t$，$z=t^3$，在 $(1, 0, 1)$ 处；

解：$x'_t=2t$，$y'_t=-1$，$z'_t=3t^2$，点 $(1, 0, 1)$ 所对应的参数 $t=1$，故 $T=(2, -1, 3)$.

切线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-1}{3}$.

法平面方程为 $2x-y+3z-5=0$.

(2) $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$（a，b，c 均为常数），在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处；

解：$x'_t=2a\sin t\cos t$，$y'_t=b\cos t\cos t-b\sin t\sin t$，$z'_t=-2\cos t\sin t$，

$t=\frac{\pi}{4}$ 所对应的点为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$，$T=(a, 0, -c)$.

切线方程为 $\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c}$，即 $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,\\ y=\frac{b}{2}.\end{cases}$

法平面方程为 $ax-cz=\frac{1}{2}(a^2-c^2)$.

(3) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\frac{t}{2}$，在点 $\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处；

解：$x'_t=1-\cos t$，$y'_t=\sin t$，$z'_t=2\cos\frac{t}{2}$，在 $\left(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2}\right)$ 处对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$，

故 $T=(1, 1, \sqrt{2})$.

切线方程为$\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

法平面方程为 $x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$.

(4) $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$，在 $t=1$ 处；

解： $x'_t=\dfrac{1}{(1+t)^2}$，$y'_t=-\dfrac{1}{t^2}$，$z'_t=2t$，$t=1$ 时，对应的点为 $\left(\dfrac{1}{2},2,1\right)$，$T=\left(\dfrac{1}{4},-1,2\right)$.

切线方程为$\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

法平面方程为$\dfrac{1}{4}x-y+2z-\dfrac{1}{8}=0$.

(5) $\begin{cases}x^2+z^2-10=0,\\ y^2+z^2-10=0\end{cases}$ 在点(1，1，3)处；

解： 方程组两端同对 x 求导：

$$\begin{cases}2x+2z\dfrac{dz}{dx}=0,\\ 2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y},$$

$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{(1,1,3)}=-\dfrac{1}{3}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1,3)}=1$，故 $T=\left(1,1,-\dfrac{1}{3}\right)$.

切平面方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{-\dfrac{1}{3}}$.

法平面方程为 $x+y-\dfrac{1}{3}z-3=0$.

(6) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=14,\\ x+y^2+z^3=8\end{cases}$ 在点(3，2，1)处；

解： $\begin{cases}2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0,\\ 1+2y\dfrac{dy}{dx}+3z^2\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2z-6xz^2}{2y(3z^2-2z)}$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-1}{3z^2-2z}$，

$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(3,2,1)}=-4$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,2,1)}=5$，$T=(1,5,-4)$，

切线方程为$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-1}{-4}$.

法平面方程为 $x+5y-4z-9=0$.

3. 在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上求一点，使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解： $x'_t=1$，$y'_t=2t$，$z'_t=3t^2$，由题意，切线垂直于平面法向量，故

$1\cdot 1+2t\cdot 2+3t^2\cdot 1=0$，

解得 $t=-\frac{1}{3}$或者 $t=-1$，

故点为$(-1,1,-1)$或$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

4. 求下列曲面在指定点处的切平面和法线方程：

(1)$e^z-z+xy=3$ 在点 $M_0(2,1,0)$处；

解： $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，

$F_x=y$，$F_y=x$，$F_z=e^z-1$，

$F_x|_{(2,1,0)}=1$，$F_y|_{(2,1,0)}=2$，$F_z|_{(2,1,0)}=0$，$\boldsymbol{n}=(1,2,0)$.

切平面的方程为 $x+2y-4=0$.

法线方程为$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{0}$.

(2)$x^2+y^2+z^2=14$ 在点$(1,2,3)$处；

解： $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，$F_x=2x$，$F_y=2y$，$F_z=2z$，

$F_x|_{(1,2,3)}=2$，$F_y|_{(1,2,3)}=4$，$F_z|_{(1,2,3)}=6$，$\boldsymbol{n}=(2,4,6)$.

切平面方程为 $2x+4y+6z-28=0$.

法线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$.

(3)$z=\ln(1+x^2+2y^2)$在点$(1,1,\ln 4)$处；

解： $F(x,y,z)=z-\ln(1+x^2+2y^2)$，

$F_x=\frac{2x}{1+x^2+2y^2}$，$F_y=\frac{4y}{1+x^2+2y^2}$，$F_z=1$，

$F_x|_{(1,1,\ln 4)}=\frac{1}{2}$，$F_y|_{(1,1,\ln 4)}=1$，$F_z|_{(1,1,\ln 4)}=1$，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

切平面方程为 $\frac{1}{2}x+y+z-\frac{3}{2}-\ln 4=0$.

法线方程为 $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\ln 4}{1}$.

(4)$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$处.

解: $F(x,y,z)=z-\arctan\dfrac{y}{x}$, $F_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $F_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $F_z=1$,

$F_x\big|_{(1,1,\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{1}{2}$, $F_y\big|_{(1,1,\frac{\pi}{4})}=\dfrac{1}{2}$, $F_z\big|_{(1,1,\frac{\pi}{4})}=1$, $\boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

切平面方程为 $-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+z-\dfrac{\pi}{4}=0$.

法线方程为 $\dfrac{x-1}{\frac{-1}{2}}=\dfrac{y-1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{1}$.

5. 求曲面 $2x^3-ye^z-\ln(z+1)=0$ 在点(1, 2, 0)处的切平面.

解: $F(x,y,z)=2x^3-ye^z-\ln(z+1)$,

$F_x=6x^2$, $F_y=-e^z$, $F_z=-ye^z-\dfrac{1}{z+1}$, $F_x\big|_{(1,2,0)}=6$, $F_y\big|_{(1,2,0)}=-1$, $F_z\big|_{(1,2,0)}=-3$.

法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,-1,-3)$.

切平面方程为 $6x-y-3z-4=0$.

6. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

解: $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$, $F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=6z$.

由题意，切平面和已知平面平行，故法向量也平行，因此，$\dfrac{2x}{1}=\dfrac{4y}{4}=\dfrac{6z}{6}$，即 $z=2x$, $y=2x$，代回原方程，得 $x=\pm1$, $y=\pm2$, $z=\pm2$.

切平面方程为 $1\cdot(x\pm1)+4\cdot(y\pm2)+6\cdot(z\pm2)=0$，即 $x+4y+6z=\pm21$.

7. 求曲面$\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 上平行于平面 $2x+2y+z+5=0$ 的切平面方程.

解: $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}-1$, $F_x=x$, $F_y=2y$, $F_z=\dfrac{z}{2}$.

切平面平行于已知平面，故法向量也平行，因此，$\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y}{2}=\dfrac{\frac{z}{2}}{1}$，即 $x=z$, $x=2y$，代回原方程，可求得点$\left(\pm1,\pm\dfrac{1}{2},\pm1\right)$.

切平面方程为 $2\cdot(x\pm1)+2\cdot\left(y\pm\frac{1}{2}\right)+1\cdot(z\pm1)=0$，即 $2x+2y+z=\pm4$.

8. 证明螺旋线$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt\end{cases}$的切线与 z 轴成定角.

证明：$x'_t=-a\sin t$，$y'_t=a\cos t$，$z'_t=b$，z 轴的单位向量$(0,0,1)$.

夹角余弦为$\frac{-a\sin t\times0+a\cos t\times0+b\times1}{\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\cdot1}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，故为定值.

9. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+6=0$ 垂直于直线$\frac{x-3}{2}=y-1=\frac{z-2}{-3}$的切平面方程.

解：$F(x,y,z)=x^2-y^2-z^2+6$，$F_x=2x$，$F_y=-2y$，$F_z=-2z$.

$\frac{2x}{2}=\frac{-2y}{1}=\frac{-2z}{-3}$，即 $y=-\frac{x}{2}$，$z=\frac{3}{2}x$，代回得 $x=\pm2$，$y=\pm1$，$z=\pm3$.

切平面方程为 $2x+3y-3z\pm6=0$.

2.7　方向导数与梯度

2.7.1　知识点概况

1. 方向导数

(1) 定义：设函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$的附近有定义，l 是以 P 为端点的一条射线，l 的方向角(即由 x 轴正向到射线 l 的夹角)为 $\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$. P'是射线 l 上的一个动点，P'，P 两点之间的距离为 $\rho(\rho\geqslant 0)$，考察函数的增量.

$\Delta f=f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0, y_0)$与 ρ 之比为

$$\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0, y_0)}{\rho}.$$

当 P'沿着 l 趋于 P 时，如果这个比的极限存在，那么这极限值就叫做函数 $f(x, y)$在点 P 处沿着方向 l 的方向导数，记作$\dfrac{\partial f}{\partial l}$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha)-f(x_0, y_0)}{\rho}.$$

(2) 求方向导数：如果函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$可微，那么函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$处沿任意方向 l(其方向角为 α)的方向导数都存在，而且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)}=f_x(x_0, y_0)\cdot\cos\alpha+f_y(x_0, y_0)\cdot\sin\alpha .$$

2. 梯度

设三元函数 $u=f(x, y, z)$在点 $P(x, y, z)$的偏导数 $f_x(x, y, z)$，$f_y(x, y, z)$，$f_z(x, y, z)$存在，那么以 $P(x, y, z)$为起点，以三个偏导数为分量的向量就叫做函数 $u=f(x, y, z)$在点 $P(x, y, z)$处的梯度，记作 $\mathbf{grad}u$ 或∇u，即

$$\mathbf{grad}u\equiv\nabla u=f_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+f_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+f_z(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

2.7.2　习题解答

1. 求 $z=\arctan(xy)$在(1，1)处沿 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$的方向导数.

解： 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{1+x^2y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{1+x^2y^2}$，则 $f_x(1,1)=\dfrac{1}{2}$，$f_y(1,1)=\dfrac{1}{2}$，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2}\times\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. 求 $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ 在点 $M(3,1)$处从点 $M(3,1)$到点 $N(6,5)$的方向导数．

解： 由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6xy+3y^2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3x^2+6xy$，则 $f_x(3,1)=12$，$f_y(3,1)=-9$，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(3,1)}=12\times\frac{3}{5}+(-9)\times\frac{4}{5}=0.$$

3. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上点(1，1，1)处，沿曲线在该点的切线方向的方向导数．

解： 由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=2z$，则 $f_x(1,1,1)=2$，$f_y(1,1,1)=2$，$f_z(1,1,1)=2$.

在任意点的切向量为$(t',(t^2)',(t^3)')$，在(1，1，1)处的切向量为(1，2，3)，可求切向量的单位向量为$\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$，单位向量的各坐标即为与坐标轴各夹角的余弦值，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=2\times\frac{1}{\sqrt{14}}+2\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

4. 求 $u=xyz$ 在点 $P(1,1,1)$处的梯度以及沿 $\boldsymbol{l}=(2,-1,3)$的方向导数．

解： 由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy$，则 $f_x(1,1,1)=1$，$f_y(1,1,1)=1$，$f_z(1,1,1)=1$，因此

$\nabla f=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

由于 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量为$\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}},-\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$，故

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=1\times\frac{2}{\sqrt{14}}+1\times\frac{-1}{\sqrt{14}}+1\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{4}{\sqrt{14}}.$$

5. 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $O(0,0,0)$及点 $A(1,1,1)$处的梯度及其大小．

解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y+3$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=4y+x-2$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=6z-6$，

$f_x(0,0,0)=3$，$f_y(0,0,0)=-2$，$f_z(0,0,0)=-6$，$\nabla f=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$；

$f_x(1,1,1)=6$，$f_y(1,1,1)=3$，$f_z(1,1,1)=0$，$\nabla f=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

6. 求 $u=x^2-xy+y^2$ 在(1，1)处沿向量 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的方向导数，并进一步求：

(1) 在什么方向上方向导数有最大值；

(2) 在什么方向上方向导数有最小值；

(3) 在什么方向上方向导数是零；

(4) u 的梯度．

解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x-y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x+2y$，$f_x(1,1)=1$，$f_y(1,1)=1$，

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)}=\cos\alpha+\sin\alpha$．

(1) $\alpha=0$ 时，方向导数有最大值，即沿 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 方向；

(2) $\alpha=\pi$ 时，方向导数有最小值，即沿 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 方向；

(3) 向量与梯度垂直时，方向导数为零，即沿 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

(4) $\nabla u=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

2.8　多元函数的极值与最值

2.8.1　知识点概况

1. 多元函数的极值

（1）必要条件：若函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$存在偏导数，且在 P_0 取得极值，则有 $f_x(x_0, y_0)=0$ ，$f_y(x_0, y_0)=0$.

（2）充分条件：设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某个领域内具有二阶连续偏导数，且点 $P_0(x_0, y_0)$是函数的驻点，即 $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$. 若记 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f_{yy}(x_0, y_0)$，则

① 当 $B^2-AC<0$ 时，点 $P_0(x_0, y_0)$是极值点，当 $A<0$ 是有极大值，当 $A>0$ 是有极小值；

② 当 $B^2-AC=0$ 时，点 $P_0(x_0, y_0)$可能是极值点，也可能不是极值点；

③ 当 $B^2-AC>0$ 时，点 $P_0(x_0, y_0)$非极值点 .

2. 最值

求连续可微函数的最大值和最小值的方法是：将函数在所讨论区域内的所有驻点处的函数值与函数在区域的边界的最大值和最小值相比较，其中最大者就是函数在闭区域上的最大值，最小者就是函数在闭区域上的最小值 .

3. 条件极值

函数 $z=f(x, y)$在满足约束条件 $\varphi(x, y)=0$ 时的条件极值问题，求解这一条件极值问题的常用方法是拉格朗日乘数法 .

拉格朗日乘数法的具体求解步骤如下：

① 构造辅助函数(称为拉格朗日函数)$L(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$. 其中，$\lambda$ 为待定常数，称为拉格朗日乘数，将原条件极值问题化为求三元函数 $L(x, y, \lambda)$的无条件极值问题.

② 由无条件极值问题的极值必要条件有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x+\lambda\varphi_x=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y+\lambda\varphi_y=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

联立求解这三个方程，解出可能的极值点(x,y)和乘数 λ；

③ 判别求出的(x,y)是否为极值点，通常由实际问题的实际意义判定.

2.8.2 习题解答

1. 求下列函数的极大值与极小值：

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$；

解：$f_x(x,y)=4-2x$，$f_y(x,y)=-4-2y$，解得驻点：$(2,-2)$.

$f_{xx}(x,y)=-2$，$f_{xy}(x,y)=0$，$f_{yy}(x,y)=-2$，

故 $A=-2$，$B=0$，$C=-2$，$B^2-AC=-4<0$，且 $A<0$，

故$(2,-2)$为极值点，且为极大值点，极大值为 $f(2,-2)=8$.

(2) $f(x,y)=xy+x^3-y^3$；

解：$f_x(x,y)=y+3x^2$，$f_y(x,y)=x-3y^2$，解得驻点：$(0,0)$，$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

$f_{xx}(x,y)=6x$，$f_{xy}(x,y)=1$，$f_{yy}(x,y)=-6y$.

对于驻点$(0,0)$，$A=f_{xx}(0,0)=0$，$B=f_{xy}(0,0)=1$，$C=f_{yy}(0,0)=0$，

$B^2-AC=1$，故非极值点；

对于驻点$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$，$A=f_{xx}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=2$，$B=f_{xy}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=1$，

$C=f_{yy}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=2$，$B^2-AC=-3<0$，且 $A>0$，

故$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$为极小值点，极小值为 $f\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$.

(3) $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$；

解：$f_x(x,y)=2e^{2x}(x+y^2+2y)+e^{2x}$，$f_y(x,y)=e^{2x}(2y+2)$，

解得驻点：$\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

$f_{xx}(x,y)=e^{2x}(4x+4y^2+8y+4)$，$f_{xy}(x,y)=e^{2x}(4y+4)$，$f_{yy}(x,y)=2e^{2x}$，

$A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e$，$B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0$，$C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e$，

$B^2-AC=-4e^2<0$ 且 $A>0$，故$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处取极小值，极小值为 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$.

(4) $f(x,y)=xy(a-x-y)$.

解：$f_x(x,y)=y(a-x-y)-xy$，$f_y(x,y)=x(a-x-y)-xy$，

解得驻点：$(0,0)$，$(a,0)$，$(0,a)$.

$f_{xx}(x,y)=-2y$，$f_{xy}(x,y)=a-2x-2y$，$f_{yy}(x,y)=-2x$.

对于驻点$(0,0)$，$A=f_{xx}(0,0)=0$，$B=f_{xy}(0,0)=a$，$C=f_{yy}(0,0)=0$，

$B^2-AC>0$，故$(0,0)$无极值；

对于驻点$(a,0)$，$A=f_{xx}(a,0)=0$，$B=f_{xy}(a,0)=-a$，$C=f_{yy}(a,0)=-2a$，

$B^2-AC>0$，故$(a,0)$无极值；

对于驻点$(0,a)$：$A=f_{xx}(0,a)=-2a$，$B=f_{xy}(0,a)=-a$，$C=f_{yy}(0,a)=0$，

$B^2-AC>0$，故$(0,a)$处无极值．

2. 求下列函数的条件极值：

(1) $z=xy$，附加条件 $x+y=1$；

解：构造辅助函数 $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(1-x-y)$.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=y-\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=x-\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=1-x-y=0.\end{cases}$$

解得 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$为极大值点，极大值为 $z=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

(2) $z=x^2+y^2$，附加条件$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

解：构造辅助函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x-\frac{\lambda}{a}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y-\frac{\lambda}{b}=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.\end{cases}$$

解得 $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$，$y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$，$\lambda=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$.

$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$为极小值点，极小值为 $z=x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

3. 要制造一个无盖的圆柱形容器，已规定容积为 V，希望表面积 S 最小(即所耗材料最省)，问该容器的高度 H 和底半径 R 应是多少?

解：(方法一) $S=\pi R^2+2\pi RH$，$H=\frac{V}{\pi R^2}$，即 $S=\pi R^2+2\pi R\frac{V}{\pi R^2}=\pi R^2+2\frac{V}{R}$. 令 $S'_R=2\pi R-2\frac{V}{R^2}=0$，得 $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$，因此可得 $H=R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

(方法二) 构造 $L(R,H,\lambda)=\pi R^2+2\pi RH+\lambda(V-\pi R^2H)$.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial R}=2\pi R+2\pi H-2\pi RH\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial H}=2\pi R-\pi R^2\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=V-\pi R^2H=0.\end{cases}$$

解得 $R=H=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

4. 要制造一个无盖的长方形容器，已规定表面积为 S，希望容积 V 最大，问该容器的长、宽、高应是多少?

解：构造 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(S-xy-2xz-2yz)$，求其对 x，y，z，λ 的一阶偏导数，并使之为零，得方程组：

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=yz-\lambda y-2z\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=xz-\lambda x-2z\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}=xy-2x\lambda-2y\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=S-xy-2xz-2yz=0.\end{cases}$$

将上述方程组的第一个方程乘以 x，第二个方程乘以 y，第三个方程乘以 z，再两两相减得：

$$\begin{cases} 2yz-2xz=0, \\ \lambda xy-2\lambda yz=0, \\ \lambda xy-2\lambda xz=0. \end{cases}$$

解得 $x=y=2z$，代入第四个方程得 $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$，$x=y=\sqrt{\frac{S}{3}}$.

2.9 总习题解答

1. 填空题

(1) $f(x, y)$在点(x, y)处可微是$f(x, y)$在该点连续的________条件，$f(x, y)$在点(x, y)连续是$f(x, y)$在该点可微的________条件.

(2) $z=f(x, y)$在点(x, y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x, y)$在该点可微的________条件，$z=f(x, y)$在点$(x, y)$可微是函数在该点偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件.

(3) $z=f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x, y)$存在且连续是$f(x, y)$在该点可微的________条件.

(4) 函数$z=f(x, y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$在区域D内连续是这两个二阶混合偏导在D内相等的________条件.

(5) 设$y^2=x$，则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=$________.

(6) 设$z=\frac{x}{y}$，$x=ct$，$y=\ln t$，则全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=$________.

解：(1)充分，必要；(2)必要，充分；(3)充分；(4)充分；(5)$\frac{1}{2}$；(6)$\frac{c}{\ln t}-\frac{c}{(\ln t)^2}$.

2. 求函数$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$的定义域.

解：$D=\{(x, y)\,|\,x\leqslant x^2+y^2<2x\}$.

3. 设$f(x+y, x-y)=x^2-y^2$，求$f(x, y)$.

解：令$x+y=u$，$x-y=v$，得$x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{u-v}{2}$，因此，

$f(u, v)=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2-\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=uv$，即$f(x, y)=xy$.

4. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\dfrac{1}{2}$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2$.

5. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

（1）$z=\ln(x+y^2)$；　　　　（2）$z=x^y$.

解：（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x+y^2}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(x+y^2)^{-2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2y}{(x+y^2)^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y(\ln x)^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

6. 设 $z=x^2\sin(x+y)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(x+y)+x^2\cos(x+y)$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\sin(x+y)+4x\cos(x+y)-x^2\sin(x+y)$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cos(x+y)-x^2\sin(x+y)$.

7. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1 e^y+f'_2$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}xe^y+f''_{13}e^y+f'_1 e^y+f''_{21}e^y+f''_{23}$.

8. 设 $u=x^y$，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$都是可微函数，求$\dfrac{du}{dt}$.

解：$\dfrac{du}{dt}=yx^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\psi'(t)$，

$=\psi(t)\varphi(t)^{\psi(t)-1}\varphi'(t)+\varphi(t)^{\psi(t)}\ln\varphi(t)\psi'(t)$.

9. 设 $z=z(x,y)$是由方程 $x^2+y^2+z^2=ye^z$ 所确定的隐函数，求 dz.

解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-ye^z$，

$F_x=2x$，$F_y=2y-e^z$，$F_z=2z-ye^z$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z-ye^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y-e^z}{2z-ye^z},$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{2x}{ye^z-2z}dx+\frac{2y-e^z}{ye^z-2z}dy.$$

10. 设 $u=x^y y^z z^x$，求 du.

解： $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$，

对原式两端取对数：$\ln u=\ln x^y y^z z^x=y\ln x+z\ln y+x\ln z$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{y}{x}+\ln z\right)x^y y^z z^x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln x+\frac{z}{y}\right)x^y y^z z^x,\ \frac{\partial u}{\partial z}=\left(\ln y+\frac{x}{z}\right)x^y y^z z^x.$$

$$du=\left(\frac{y}{x}+\ln z\right)x^y y^z z^x dx+\left(\ln x+\frac{z}{y}\right)x^y y^z z^x dy+\left(\ln y+\frac{x}{z}\right)x^y y^z z^x dz.$$

11. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $M_0(2,1,0)$处的切平面方程与法线方程.

解： 设 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，

$F_x=y$，$F_y=x$，$F_z=e^z-1$，$M_0(2,1,0)$代入有切平面法向量$(1,2,0)$.

切平面方程为 $x+2y-4=0$.

法线方程为$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{0}$.

12. 求螺旋线 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$z=b\theta$ 在点$(a,0,0)$处的切线及法平面方程.

解： $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta$，$\frac{dz}{d\theta}=b$，点$(a,0,0)$所对应的参数 $\theta=0$，故切向量为$(0,a,b)$.

切线方程$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b}$.

法平面方程为 $ay+bz=0$.

13. 求曲面 $z=xy$ 上何处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出法线的方程.

解： 设所求的点 $M(x_0,y_0,z_0)$，曲面在该点处的一个法向量为$(y_0,x_0,-1)$，平面的法向量为$(1,3,1)$，因此$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}$，求得点为$(-3,-1,3)$，法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

14. 求函数 $u=xy+yz+zx$ 在点$(1,2,3)$的梯度.

解： 由$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$，$\frac{\partial u}{\partial z}=y+x$，得

$f_x(1,2,3)=5$，$f_y(1,2,3)=4$，$f_z(1,2,3)=3$，故

$\nabla f=5\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

15. 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$的极值 .

解： $f_x(x,y)=(6-2x)(4y-y^2)$，$f_y(x,y)=(6x-x^2)(4-2y)$，

解得驻点(0，0)，(0，4)，(6，0)，(6，4)，(3，2).

$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2)$，$f_{xy}(x,y)=(6-2x)(4-2y)$，$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2)$.

对于驻点(0，0)，可计算得 $A=0$，$B=24$，$C=0$，$B^2-AC>0$，非极值.

对于驻点(0，4)，可计算得 $A=0$，$B=-24$，$C=0$，$B^2-AC>0$，非极值.

对于驻点(6，0)，可计算得 $A=0$，$B=-24$，$C=0$，$B^2-AC>0$，非极值.

对于驻点(6，4)，可计算得 $A=0$，$B=24$，$C=0$，$B^2-AC>0$，非极值.

对于驻点(3，2)，可计算得 $A=-8$，$B=0$，$C=-16$，$B^2-AC=-128<0$. 又 $A<0$，故(3，2)为极大值点，极大值为 $f(3,2)=36$.

第 3 章　多元函数积分法

多元函数积分学是一元函数积分学的推广和发展，将一元函数定积分中"和式的极限"推广到区域、曲线及曲面上的多元函数的相应情形，便得到了重积分、曲线积分和曲面积分。本章主要就是介绍重积分、曲线积分和曲面积分的概念、性质、计算方法及应用。

3.1　二重积分的概念与性质

3.1.1　知识点概况

1. 二重积分的概念

(1) 定义：二元函数 $z=f(x,y)$ 定义在有界闭区域 D 上．将区域 D 任意分成 n 个子域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，并以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个子域的面积．在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各个子域的直径中的最大值 λ 趋于零时，此和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(2) 几何意义：当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是以 D 为底，以 $f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积；当 $f(x,y)<0$ 时，柱体在 xOy 平面的下方，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示该柱体体积的相反值，即 $f(x,y)$ 的绝对值在 D 上的二重积分 $\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$ 才是该曲顶柱体的体积；当 $f(x,y)$ 在 D 上有正有负时，如果我们规定在 xOy 平面上方的柱体体积取正号，在 xOy 平面下方的柱体体积取负号，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值就是它们

上下方柱体体积的代数和.

2. 二重积分的性质

性质 1 被积函数中的常数因子可以提到二重积分的外面，即

$$\iint_D kf(x, y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma(k \text{ 为常数}).$$

性质 2 函数的和(或差)的二重积分等于各个函数的二重积分的和(或差)，即

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3 如果区域 D 被分成两个子区域 D_1 与 D_2，则在 D 上的二重积分等于各子区域 D_1，D_2 上的二重积分之和，即

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

这个性质表明二重积分对于积分区域具有可加性.

性质 4 如果在 D 上，$f(x, y)=1$，且 D 的面积为 σ，则

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sigma.$$

性质 5 如果在 D 上，$f(x, y) \leqslant g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

推论 函数在 D 上的二重积分的绝对值不大于函数的绝对值在 D 上的二重积分，即

$$\left|\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\mathrm{d}\sigma.$$

性质 6 如果 M, m 分别是函数 $f(x, y)$在 D 上的最大值与最小值，σ 为区域 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

性质 7(二重积分中值定理) 设函数 $f(x, y)$在有界闭区域 D 上连续，记 σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta)\sigma.$$

这些性质的证明与相应的定积分性质的证法相类似.

3.1.2 习题解答

1. 利用二重积分的性质求下列积分的值.

(1) $I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解：因为 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$，积分区域的面积等于 2，在 D 上 $f(x,y)$ 的最大值为 $M=\dfrac{1}{4}(x=y=0)$，最小值为 $m=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}(x=1,y=2)$，故 $\dfrac{1}{5}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma\leqslant I\leqslant \dfrac{1}{4}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$，即：$\dfrac{2}{5}\leqslant I\leqslant \dfrac{1}{2}$.

(2) $I=\iint\limits_D (x+y+10)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成.

解：令 $f(x,y)=x+y+10$，关键是求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值，在 D 内部，$f_x=1$，$f_y=1$，因此 $f(x,y)$ 在 D 内部无驻点，最值点一定在边界上取得，作 $F(x,y)=x+y+10+\lambda(x^2+y^2-4)$

由方程组 $\begin{cases} F'_x=1+2\lambda x=0, \\ F'_y=1+2\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0, \end{cases}$

解得驻点为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，比较可得最小值为 $m=10-2\sqrt{2}$，最大值为 $M=10+2\sqrt{2}$，D 的面积为 4π，由估值定理得 $8\pi(5-\sqrt{2})\leqslant I\leqslant 8\pi(5+\sqrt{2})$.

2. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小.

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

解：由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$ 内，故在 D 上有 $(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$，从而有 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

解：由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1\}$ 内，故在 D 上有 $(x+y)^2\geqslant(x+y)^3$，因此有 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$．

解：由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$ 内，故在 D 上有 $0\leqslant \ln(x+y)\leqslant 1$，从而有 $\iint\limits_D \ln(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$．

3.2　二重积分的计算

3.2.1　知识点概况

1. 利用直角坐标计算二重积分：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 或} \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 利用极坐标计算二重积分：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

3.2.2　习题解答

1. 将二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为二次积分，积分区域如下：

(1) D 为 $x+y=1$，$x-y=1$，$x=0$ 围成的区域；

(2) D 为 $x=a$，$x=2a$，$y=-b$，$y=\dfrac{b}{2}(a>0,\ b>0)$ 围成的区域；

(3) D 为 $(x-2)^2+(y-3)^2\leqslant 4$ 围成的区域；

(4) D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$，$y\geqslant x$，$x\geqslant 0$ 围成的区域；

(5) D 为 $y=x^2$，$y=4-x^2$ 围成的区域．

解：(1) 区域 D 既是 X 型又是 Y 型区域，故有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_0^{1+y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 区域 D 为既是 X 型又是 Y 型区域，故有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^{2a} \mathrm{d}x\int_{-b}^{\frac{b}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-b}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y\int_a^{2a} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 区域 D 为既是 X 型又是 Y 型区域，故有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^4 \mathrm{d}x\int_{3-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{3+\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^5 \mathrm{d}y\int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(4) 区域 D 既是 X 型又是 Y 型区域，故有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(5) 区域 D 既是 X 型又是 Y 型区域，故有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2. 更换下列二次积分的次序.

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$；　(6) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解:(1) 积分区域 D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$x^2\leqslant y\leqslant x$，则更换后的二次积分为

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^x f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 积分区域 D：$-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$，$0\leqslant y\leqslant 1$，则更换后的二次积分为

$$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 积分区域 D_1：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant x$，D_2：$1\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant 2-x$，则更换后的二次积分为

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(4) 积分区域 D：$1\leqslant x\leqslant 2$，$1-x\leqslant y\leqslant 0$，则更换后的二次积分为

$$\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(5) 积分区域 D：$\mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant\mathrm{e}$，$0\leqslant y\leqslant 1$，则更换后的二次积分为

$$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(6) 积分区域 D：$y^2\leqslant x\leqslant y+2$，$-1\leqslant y\leqslant 2$，则更换后的二次积分为

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3. 确定常数 a，使 $\iint\limits_D a\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，其中 D 是 $y=x$，$y=2x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的区域.

解：积分区域既是 X 型区域又是 Y 型区域，若选 X 型计算，有 D：$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$x\leqslant y\leqslant 2x$.

$$\iint\limits_D a\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{2x}a\sin(x+y)\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\cos(x+y)]_x^{2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a(\cos2x-\cos3x)\mathrm{d}x=a\left[\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{3}\sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}a,$$

则 $a=3$.

4. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $y=x$ 与 $y=x^2$ 围成的区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成的区域；

(3) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是以(0，0)，(1，2)，(2，1)为顶点的三角形区域；

(4) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $x^2+y^2\geqslant 2x$，$x=1$，$x=2$，$y=x$ 围成的区域，设

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & 1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

(5) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是以(0，0)，(1，1)，(0，1)为顶点的三角形区域；

(6) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $x=0$，$y=0$，$x=\pi$ 与 $y=\sin x$ 围成的区域.

解：(1) 积分区域既是 X 型又是 Y 型区域，则先对 x 积分和先对 y 积分均可，若选择先 x 积分后 y 积分，则将区域 D 看作 Y 型区域，故有 D：$y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}$，$0\leqslant y\leqslant 1$.

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}xy\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{2}yx^2\right]_y^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y^3\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1=\frac{1}{24}.$$

(2) 积分区域既是 X 型又是 Y 型区域，则先对 x 积分和先对 y 积分均可，若选择先 x 积分后 y 积分，则将区域 D 看作 Y 型区域，故有 D：$y^2\leqslant x\leqslant\sqrt{y}$，$0\leqslant y\leqslant 1$.

$$\iint\limits_D (x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+yx\right]_{y^2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}y^6-y^3\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{8}{15}y^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{21}y^7-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1=\frac{33}{140}.$$

(3) 积分区域既是 X 型又是 Y 型区域，按 X 型区域计算，分割区域 D 成两部分，即

D_1：$0\leqslant x\leqslant 1$，$\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x$；$D_2$：$1\leqslant x\leqslant 2$，$\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x$.

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\mathrm{d}y+\int_1^2 x\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\left(3x-\frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[x^3]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=\frac{3}{2}.$$

(4) 积分区域是 X 型区域，故有 D：$1\leqslant x\leqslant 2$，$\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant x$.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}y\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}\mathrm{d}x=\int_1^2(x^4-x^3)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{49}{20}.$$

(5) 积分区域既是 X 型又是 Y 型区域，则先对 x 积分和先对 y 积分均可，若选择先 x 积分后 y 积分，则将区域 D 看作 Y 型区域，故有 D：$0\leqslant x\leqslant y$，$0\leqslant y\leqslant 1$.

$$\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1[\mathrm{e}^{-y^2}x]_0^y\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-y^2}]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

(6) 积分区域既是 X 型又是 Y 型区域，则先对 x 积分和先对 y 积分均可，若选择先 y 积分后 x 积分，则将区域 D 看作 X 型区域，故有 D：$0\leqslant x\leqslant \pi$，$0\leqslant y\leqslant \sin x$.

$$\iint_D(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)\mathrm{d}y=\int_0^\pi\left[x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi\left(x^2\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)\mathrm{d}x=-\int_0^\pi x^2\mathrm{d}(\cos x)+\frac{1}{3}\int_0^\pi(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=[-x^2\cos x]_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$$

$$=\pi^2-\frac{4}{9}+\int_0^\pi 2x\mathrm{d}(\sin x)=\pi^2-\frac{4}{9}+[2x\sin x]_0^\pi-2\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\pi^2-\frac{4}{9}+2[\cos x]_0^\pi=\pi^2-\frac{4}{9}-4=\pi^2-\frac{40}{9}.$$

5. 利用极坐标计算下列二重积分.

(1) $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$ 的圆形区域；

(2) $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=2x$ 围成的区域；

(3) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的区域；

(4) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 所围成的区域；

(5) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 及直线 $y=x$，$y=0$ 所围成的第一象限内的区域．

解：(1) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则积分区域 D：$a\leqslant r\leqslant b$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}(b^4-a^4).$$

(2) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则积分区域 D 可看作两部分区域的差，即

D_1：$0\leqslant r\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$；$D_2$：$0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$．

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{16}{3}\pi-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\pi-\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta)\\&=\frac{16}{3}\pi-\frac{16}{3}\left[\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}.\end{aligned}$$

(3) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则积分区域 D：$0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}a^3.$$

(4) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则积分区域 D：$0\leqslant r\leqslant\sin\theta+\cos\theta$，$-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+2\sin 2\theta+\sin^2 2\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{3}\left[\theta-\cos 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}+\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6}\left[\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(5) 令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则积分区域 D：$1\leqslant r\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\mathrm{d}r=\frac{3\pi^2}{64}.$$

6. 利用二重积分，计算下列曲线围成的平面图形的面积.

(1) $y=x$，$y=5x$，$x=1$；

(2) $xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=x$，$y=2x(x>0,y>0)$.

解：(1) 积分区域是 X 型区域，故有 D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$x\leqslant y\leqslant 5x$.

$$S=\iint_D d\sigma=\int_0^1 dx\int_x^{5x}dy=\int_0^1[y]_x^{5x}dx=\int_0^1 4x dx=2.$$

(2) 积分区域既不是 X 型又不是 Y 型区域，故分割区域 D 成两部分，即

$$D_1:\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant a,\ \frac{a^2}{x}\leqslant y\leqslant 2x;D_2:a\leqslant x\leqslant\sqrt{2}a,\ x\leqslant y\leqslant\frac{2a^2}{x}.$$

$$S=\iint_D d\sigma=\iint_{D_1}d\sigma+\iint_{D_2}d\sigma=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{a}dx\int_{\frac{a^2}{x}}^{2x}dy+\int_a^{\sqrt{2}a}dx\int_x^{\frac{2a^2}{x}}dy$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{a}\left(2x-\frac{a^2}{x}\right)dx+\int_a^{\sqrt{2}a}\left(\frac{2a^2}{x}-x\right)dx$$

$$=\left[x^2-a^2\ln x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{a}+\left[2a^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right]_a^{\sqrt{2}a}=\frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

7. 用二重积分计算立体 Ω 的体积 V，其中 Ω 由平面 $z=0$，$y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=2a$ 和 $z=3x+2y$ 所围成($a>0$).

解：
$$V=\iint_\Omega(3x+2y)d\sigma=\int_a^{2a}dy\int_{y-a}^{y}(3x+2y)dx$$

$$=\int_a^{2a}\left(5ay-\frac{3}{2}a^2\right)dy=6a^3.$$

8. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=2Rx(R>0)$ 所围(包含原点那一部分)的体积.

解：根据对称性可知

$$V=4\iint_D\sqrt{4R^2-x^2-y^2}dxdy.$$

其中，D 为 xOy 平面上 $y=\sqrt{2Rx-x^2}$ 与 x 轴所围平面区域，用极坐标系进行计算：

$$V=4\iint_D\sqrt{4R^2-r^2}rdrd\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}\sqrt{4R^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{32R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{32}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

9. 计算二重积分 $\iint_D y dxdy$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

解：区域 D 和 D_1 如图 3.2.1 所示，有

$$\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{D+D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{2} y\mathrm{d}y = 4 .$$

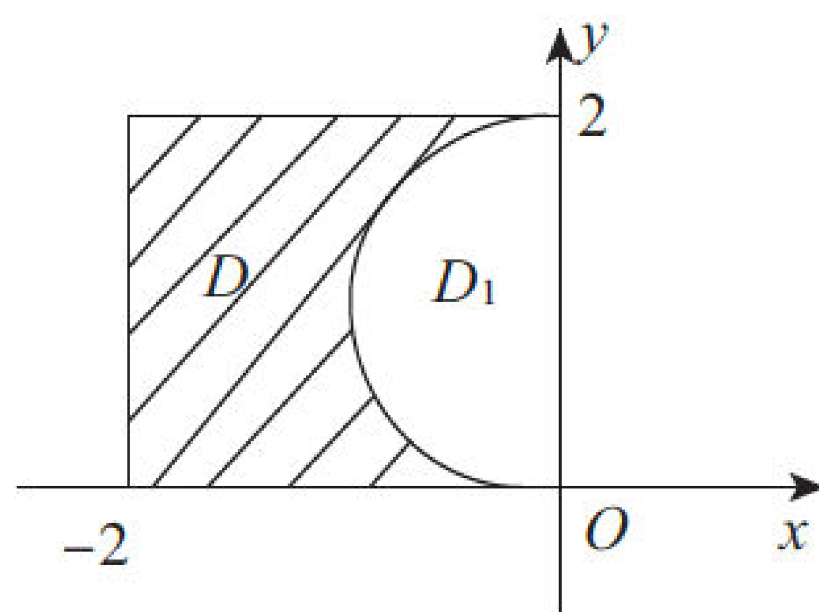


图 3. 2. 1

在极坐标系下，有

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta,\ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}，因此$$

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{2\sin\theta} r\sin\theta r\,\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{12}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2},$$

于是 $\iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 - \frac{\pi}{2}$.

10. 计算二重积分 $I = \iint\limits_{D}\sqrt{|y - x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 由 $0 \leqslant y \leqslant 2$ 和 $|x| \leqslant 1$ 确定.

解：由于绝对值符号内的函数在 D 内变号，即当 $y \geqslant x^2$ 时，$y - x^2 \geqslant 0$；$y < x^2$ 时，$y - x^2 < 0$. 因此，用曲线 $y = x^2$ 将 D 分为 D_1 和 D_2 两部分，D_1：$0 \leqslant y \leqslant x^2, -1 \leqslant x \leqslant 1$；$D_2$：$-1 \leqslant x \leqslant 1$，$x^2 \leqslant y \leqslant 2$，如图 3. 2. 2 所示.

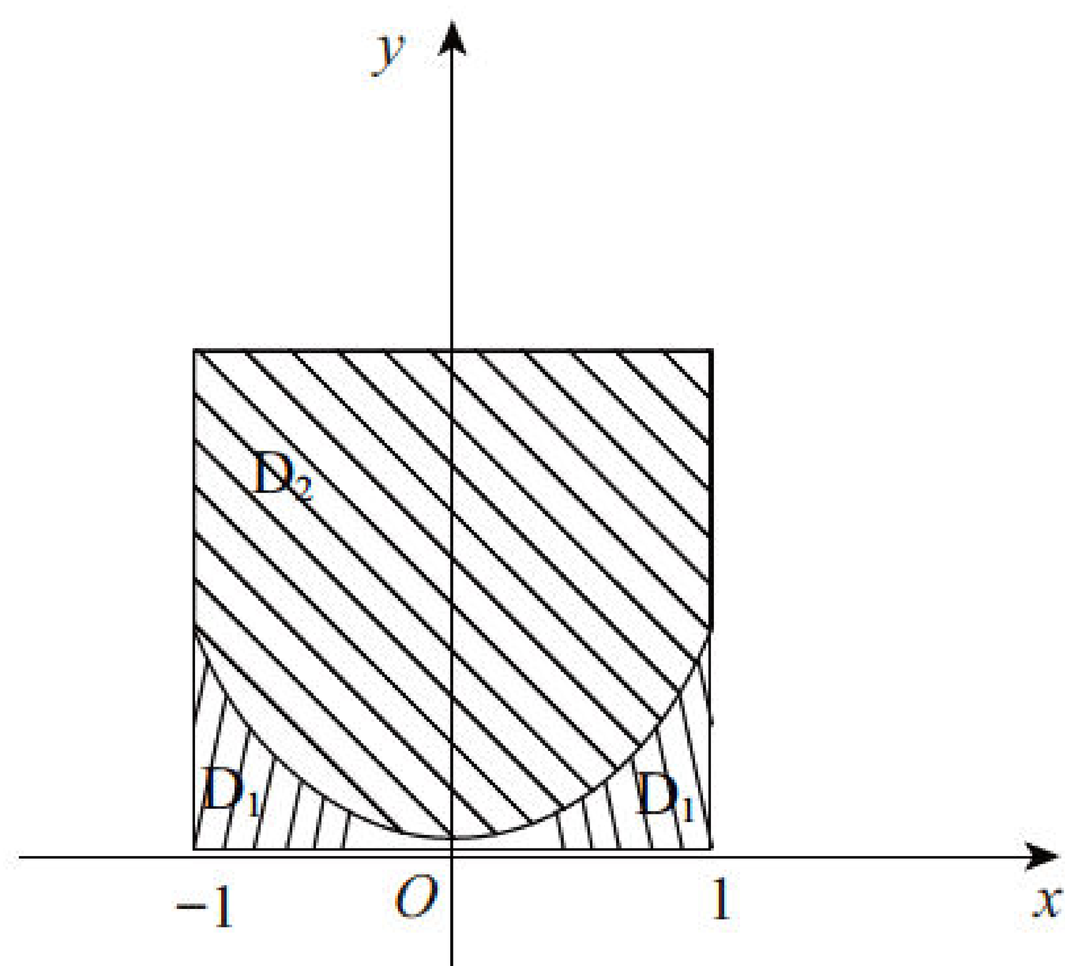


图 3. 2. 2

$$I = \iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2 - y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2}\sqrt{y - x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y - x^2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[-\frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{x^2}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\left[\frac{2}{3}(y - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x + \frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x .$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{9\sqrt{3}}{64}.$$

11. 设 $f(x)$ 连续，证明 $\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{x} f(y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a}(a - x)f(x)\mathrm{d}x$.

证明：更换二次积分的次序有

$$\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{x} f(y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{y}^{a} f(y)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}(a - y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a}(a - x)f(x)\mathrm{d}x .$$

3.3 三重积分

3.3.1 知识点概况

1. 三重积分

设 $f(x, y, z)$是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数．将 Ω 任意分成 n 个小闭区域 Δv_1，Δv_2，…，Δv_n．其中，Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积．在每个 Δv_i 上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作乘积$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i=1, 2, \cdots, n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$，如果当各小闭区域直径中的最大值 λ 趋于零时这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x, y, z)$在闭区域 Ω 上的三重积分.记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i .$$

其中 $\mathrm{d}v$ 叫做体积元素．

2. 三重积分的计算

(1) 利用直角坐标计算三重积分：

若 $f(x, y, z)$在 $\Omega=\{(x, y, z) \mid z_1(x, y)\leqslant z\leqslant z_2(x, y), y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}$ 上连续，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z ;$$

(2) 利用柱面坐标计算三重积分：

令 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$ 则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$；

(3) 利用球面坐标计算三重积分：

令 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$ 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

3.3.2 习题解答

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 围成．

解：（方法一）利用柱面坐标系，令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$，把 Ω 的边界曲面化为 $z=\sqrt{R^2-\rho^2}, z=R-\sqrt{R^2-\rho^2}$，它们的交线在 xOy 平面上的投影方程为 $\begin{cases}\rho=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R,\\ z=0,\end{cases}$ 于是

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega} z^2\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\rho\mathrm{d}\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\rho\left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-\rho^2})^3\right]\mathrm{d}\rho \\
&= -\frac{2}{3}\pi\left[\frac{2}{5}(R^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}+2R^3\rho^2-\frac{3}{4}R\rho^4+R(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = \frac{59}{480}\pi R^5.
\end{aligned}$$

（方法二）利用球面坐标，把 Ω 的边界化为球面坐标，得：$r=R$，$r=2R\cos\varphi$. 它们的交线为圆 $\begin{cases}r=R,\\ \varphi=\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega} r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{5}\pi R^5\left(-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2\pi}{5}(2R)^5\left(-\frac{1}{8}\cos^8\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{59}{480}\pi R^5.
\end{aligned}$$

（方法三）“先二后一”的方法，用平行于 xOy 的平面横截区域 Ω，得

$$D_z = \begin{cases}\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-(z-R)^2\}, & 0\leqslant z\leqslant \dfrac{R}{2},\\ \{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\}, & \dfrac{R}{2}\leqslant z\leqslant R,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{故 } I &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}r + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2\pi\left[R^2-(z-R)^2\right]\mathrm{d}z + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{2R}{4}z^4-\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^{\frac{R}{2}}+\left(\frac{R^2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5\right)\Big|_{\frac{R}{2}}^{R}\right]=\frac{59}{480}\pi R^5 .$$

2. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=1, y=x$ 及 $z=0$ 所围成的闭区域．

解：积分区域 Ω 用不等式组表示为：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0\leqslant z\leqslant xy,\end{cases}$ 则

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_0^1x^5\mathrm{d}x\int_x^1y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1(x^5-x^{12})\mathrm{d}x=\frac{1}{312}.$$

3. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是曲线 $\begin{cases}x=0,\\ y^2=2z\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2, z=8$ 围成的立体．

分析：由于 Ω 是旋转体，故采用“先二后一”计算，而 Ω 是绕 z 轴旋转而成的旋转体，须将 Ω 向 z 轴投影．

解：将 Ω 向 z 轴投影得投影区间[2，8].

由于 Ω 由 $z=2$，$z=8$ 及曲面 $x^2+y^2=2z$ 围成，所以 $D(z)$ 为 $x^2+y^2\leqslant 2z$，于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_2^8\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\cdot r\mathrm{d}y=2\pi\int_2^8\frac{4z^2}{4}\mathrm{d}z$$

$$=336\pi .$$

4. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z^2=\dfrac{h^2(x^2+y^2)}{R^2}$ 及 $z=h(h>0)$ 所围成的闭区域．

分析：Ω 是圆锥体，被积函数 $f(x, y, z)=z$ 形如 $f(x^2+y^2, z)$，故选用柱面坐标计算．

解：$I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{\frac{h}{R}\rho}^{h}\rho z\mathrm{d}z=\pi\int_0^R\rho\left(h^2-\frac{h^2}{R^2}\rho^2\right)\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{1}{4}\pi R^2h^2 .$$

5. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域．

分析：由于 Ω 是球体，被积函数 $x^2+y^2+z^2$ 形如 $f(x^2+y^2+z^2)$，故选用球面坐标计算.

解：$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2 \cdot r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi .$$

6. 求下列区域的体积：

(1) Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 中被曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 所截的下方部分；

(2) Ω 是 $z=x^2+y^2$，$x+y+z=1$ 所围区域 .

解：(1)两曲面的交线为

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+az=4a^2,\\ x^2+y^2+z^2=4az\end{cases}\Rightarrow z^2-5az+4a^2=0\Rightarrow z=a \text{ 或 } z=4a,$$

所以两曲面的交线为$\begin{cases}z=a,\\ x^2+y^2=3a^2\end{cases}$和交点(0，0，4$a$)，因此 Ω 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xOy}：$x^2+y^2\leqslant 3a^2$，所以 Ω 的体积为

$$V = \iint\limits_{D_{xOy}}\left[\frac{1}{a}(4a^2-x^2-y^2)-(2a-\sqrt{4a^2-x^2-y^2})\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}\left[\frac{1}{a}(4a^2-r^2)-(2a-\sqrt{4a^2-r^2}\right]r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{a}\left(2a^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)-\left(ar^2+\frac{1}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{3}a} = \frac{37}{6}\pi a^3.$$

(2) 两曲面的交线为

$$\Gamma:\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}\Rightarrow x^2+x+y^2+y=1,$$

所以 Ω 在 xOy 平面上的投影区域为

$$D_{xOy}:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2},$$

故 Ω 的体积为

$$V = \iint\limits_{D_{xOy}}[1-x-y-x^2-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_{xOy}}\left[\frac{3}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{v^2+u^2\leqslant\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{2}-u^2-v^2\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$= \frac{9}{4}\pi-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}r^2 r\mathrm{d}r = \frac{9}{4}\pi-2\pi\times\frac{1}{4}\times\frac{9}{4} = \frac{9}{8}\pi .$$

3.4 重积分的应用

3.4.1 知识点概况

1. 曲面面积：曲面方程为 $z=f(x,y)$，Σ 为曲面的一部分，D 为 Σ 在 xOy 平面上的投影，则曲面 Σ 的面积为 $S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 重心：非均匀物体 V 上每一点的密度为 $\mu(x,y,z)$，现在考虑物体 V 的重心

$$x_0=\frac{\iiint\limits_{V}x\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{V}\mu(x,y,z)\mathrm{d}v};\quad y_0=\frac{\iiint\limits_{V}y\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{V}\mu(x,y,z)\mathrm{d}v};\quad z_0=\frac{\iiint\limits_{V}z\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{V}\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

3. 转动惯量：非均匀的物体 V，在 V 上每一点的密度为 $\mu(x,y,z)$，则物体 V 对于 xOy 平面的转动惯量 J_{xy}，对 x 轴的转动惯量 J_x 及对于原点 O 的转动惯量 J_O，有

$$J_{xy}=\iiint\limits_{V}z^2\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$J_x=\iiint\limits_{V}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$J_O=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

至于物体对于其他两个坐标面及坐标轴的转动惯量也有类似的公式.

3.4.2 习题解答

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截下来的那一部分的面积.

解：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所截下来的那一部分的曲面在 xOy 面的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 2x$. 又

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

所以
$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\mathrm{d}r=\sqrt{2}\pi.$$

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$ 内部的面积．

解： 由对称性，只需计算第一卦限阴影部分的面积 S_1 再乘以 4 即可．

该曲面的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 它在 xOy 面上的投影为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant Rx,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

于是

$$S_1=4\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho=2\pi R^2-4R^2\ .$$

3. 求柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被柱面 $y^2+z^2=R^2$ 所截部分的面积．

解： 为计算该柱体的表面积，只需计算第一卦限阴影部分的面积 S_1（如图 3.4.1）再乘以 16 即可．

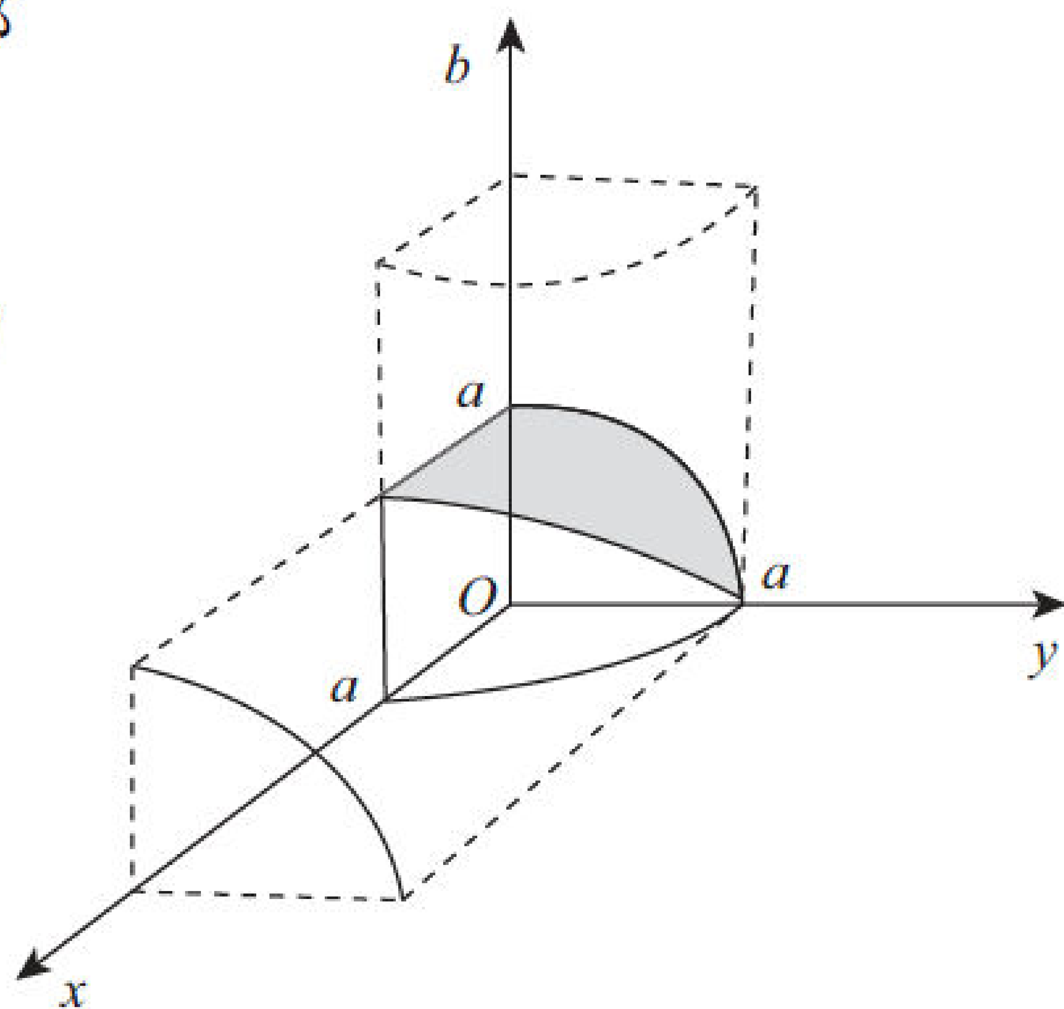


图 3.4.1

该曲面的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$，它在 xOy 面上的投影为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\},$$

且
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

于是

$$S_1=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y=R^2\ ,$$

故 $S=16S_1=16R^2$.

4. 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心的位置．

解： 记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 O，射线 OP_0 为正 x 轴，建立直角坐标系，则点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，体密度为 $\mu(x,y,z)=k[(x-R)^2+y^2+z^2]$.

设 Ω 的重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性 $\bar{y}=0$，$\bar{z}=0$，

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} xk[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v},$$

而$\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}v$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5$$

$$=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=-2R\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{2}{3}R\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{2}{3}R\cdot\frac{4}{5}\pi R^5=-\frac{8}{15}\pi R^6,$$

故 $\bar{x}=-\frac{R}{4}$，因此，球体 Ω 的重心坐标为$\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$．

5．求半径为 a 的均匀半圆薄片(面密度 ρ 为常数)对于其直径边的转动惯量．

解： 薄片所占区域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0\}.$$

该薄片对 x 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho\mathrm{d}\sigma=\rho\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma=\rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\rho\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\rho a^4\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{8}\rho\pi a^4.$$

6．设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$的各点密度与坐标原点到该点的距离成反比．求球体的质量 M 及球体绕 z 轴旋转的转动惯量 I.

解： 由已知球内任一点(x,y,z)的密度为 $\rho(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(k>0)$，则

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{k}{r}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2k\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\times 4a^2\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\pi ka^2,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\frac{k(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{kr^2\sin^2\varphi}{r}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\times16\sin^3\varphi a^4\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{16}{35}\pi ka^4.$$

3.5 曲线积分

3.5.1 知识点概况

1. 对弧长的曲线积分

(1) 定义：设函数 $f(M)$在光滑曲线 L 上连续，A，B 是 L 的端点，用点 $A=M_0$，M_1，…，M_{n-1}，$M_n=B$ 把 L 分为 n 个小弧段. 在每一小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$($i=1, 2, 3, \cdots, n$)上任取一点 N_i，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i$，其中 Δs_i 是弧$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$的长度. 当把 L 无限细分使得 Δs_i($i=1, 2, \cdots, n$)中弧长的最大值 $\lambda\to 0$ 时，和数 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i$ 的极限称为函数 $f(M)$沿曲线 L 的对弧长的曲线积分(或第一型曲线积分)，记作

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i .$$

这里 $f(M)$叫做被积函数，L 叫做积分弧段.

(2) 计算：若曲线 L 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

在区间$[\alpha, \beta]$上具有一阶连续导数，则

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t .$$

特别地，当曲线方程为 $y=\psi(x)$，且 $\psi(x)$在$[x_0, x_1]$上具有连续导数时，则

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1} f(x, \psi(x))\sqrt{1+[\psi'(x)]^2}\,\mathrm{d}x .$$

当曲线方程为 $x=\varphi(y)$且 $\varphi(y)$在$[y_0, y_1]$上具有连续导数时，则

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y), y)\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\,\mathrm{d}y.$$

如果 L 是空间曲线，并有参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

那么也有完全类似的结果：

$$\int_L f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\,\mathrm{d}t .$$

2. 对坐标的曲线积分

(1) 定义：设曲线 L 为 xOy 面上一条有向光滑曲线，L 的起点为 A，终点为 B. 在$\widehat{AB}$上依次加入 $n-1$ 个点：M_1，M_2，…，M_{i-1}，M_i...，M_{n-1}，并设 $A=M_0$，$B=M_n$，则这些点把$\widehat{AB}$分成 n 个有向小弧段，令 $M_i=(x_i, y_i)$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，其中 $i=1$，2，…，n，在$\widehat{M_{i-1}M_i}$任取一点 N_i $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$，令 λ 为各弧度长度的最大值. 若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(x_i, y_i)\Delta x_i$ 存在，则称此值为 $P(x, y)$ 在曲线 L 上对坐标 x 的曲线积分. 类似可定义 $Q(x,y)$ 在曲线 L 上对坐标 y 的曲线积分. 上述两个积分也称第二型曲线积分，并且分别记作

$$\int_L P(x, y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\bar{x}_i+\bar{y}_j)\Delta x_i;$$

$$\int_L Q(x, y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\bar{x}_i+\bar{y}_j)\Delta y_i .$$

同时规定

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+\int_L Q\mathrm{d}y .$$

同样可以定义空间曲线 L 上的第二型曲线积分，也就是说，假设 L 是有向的空间光滑曲线，并且 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$都是 L 上的连续函数，则可类似地定义这些函数沿 L 的对坐标的曲线积分：

$$\int_L P(x, y, z)\mathrm{d}x+Q(x, y, z)\mathrm{d}y+R(x, y, z)\mathrm{d}z .$$

(2) 计算：假设曲线的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有一阶连续导数，而且 $t=\alpha$ 时对应于 A 点，$t=\beta$ 时对应于 B 点. 如果函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$在 L 上连续，那么第二型曲线积分可表达为定积分

$$\int_L P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\right\}\mathrm{d}t .$$

特别地，当曲线 L 的方程为 $y=\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，并且 A，B 两点分别对应于 $x=a$，$x=b$ 时，上式可改写为

$$\int_{AB} P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=\int_a^b\left\{P[x, \varphi(x)]+Q[x, \varphi(x)]\varphi'(x)\right\}\mathrm{d}x .$$

假设曲线 L 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

而且当 $t=\alpha$ 时对应于 A 点，$t=\beta$ 时对应于 B 点，如果 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$ 及 $R(x, y, z)$ 在 L 上都连续，那么第二型曲线积分可表达为定积分

$$\int_L P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_\alpha^\beta \{[P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t.$$

3.5.2 习题解答

1. 计算下列对弧长的曲线积分.

(1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x = a\cos t$，$y = a\sin t\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\int_L y\mathrm{d}s$，其中 L 为抛物线 $y^2 = 4x$ 在点(0，0) 到点(1，2) 的弧段；

(3) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 是以 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(0, 1)$ 为顶点的三角形围成；

(4) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2 = ax$.

解：(1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\sqrt{[(a\cos t)']^2+[(a\sin t)']^2}\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cdot a\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}a^3.$$

(2) $\int_L y\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{4x} \cdot \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

(3) 如图 3.5.1 所示，L 由线段$\overline{AO}$、$\overline{OB}$、$\overline{BA}$组成. 利用积分性质得：

$$\oint_L (x+y)\mathrm{d}s = \int_{\overline{AO}} (x+y)\mathrm{d}s + \int_{\overline{OB}} (x+y)\mathrm{d}s + \int_{\overline{BA}} (x+y)\mathrm{d}s.$$

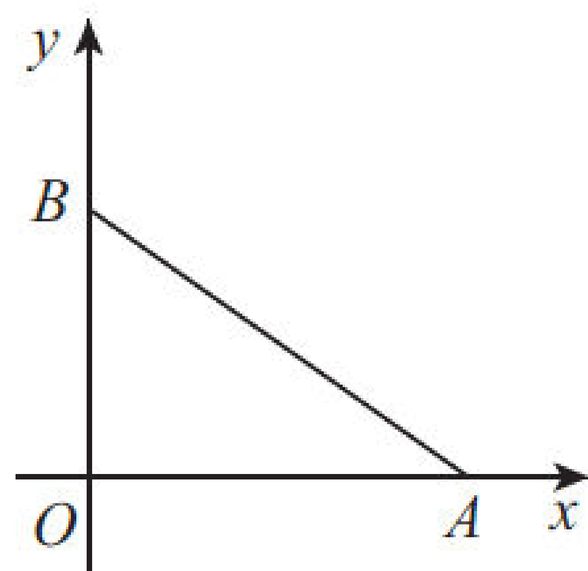


图 3.5.1

线段 $\overline{AO}$ 的参数方程为$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$，故

$$\int_{\overline{AO}} (x+y)\mathrm{d}s = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

线段$\overline{OB}$ 的参数方程为$\begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases}$，$0 \leqslant y \leqslant 1$，$\mathrm{d}s = \mathrm{d}y$，故

$$\int_{\overline{OB}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

线段$\overline{BA}$的参数方程为$\begin{cases}x=x\\y=1-x\end{cases}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}\mathrm{d}x$，故

$$\int_{\overline{BA}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1 1\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x=\sqrt{2}.$$

从而$\oint_L(x+y)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}.$

(4) 由题可知，L 的参数方程为 $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$，$y=\frac{a}{2}\sin t$，则有

$x'=-\frac{a}{2}\sin t$，$y'=\frac{a}{2}\cos t$，且 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

故有$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2}\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\mathrm{d}t$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t=2a^2.$$

2. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$，计算 $I=\oint_L(x^2+y^3)\mathrm{d}s$.

解： 由于积分曲线 L 关于 x 轴对称，被积函数 $f(x,y)=y^3$ 是关于 y 的奇函数，所以

$$\oint_L y^3\mathrm{d}s=0.$$

又因为 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$，所以 L 具有对称性，从而

$$\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}R^2\oint_L\mathrm{d}s=\pi R^3.$$

所以 $I=\oint_L(x^2+y^3)\mathrm{d}s=\pi R^3$.

3. 设 L 是由圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围成图形的边界，计算 $I=\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$.

解： 如图 3.5.2，积分曲线 L 由线段$\overline{OA}$、圆弧$\overset{\frown}{AB}$和线段$\overline{BO}$组成，于是

$$I=\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{\overset{\frown}{AB}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{\overline{BO}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s.$$

在$\overline{OA}$ 上，$\overline{OA}$：$\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}$，$(0\leqslant x\leqslant a)$，$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$.

在$\overset{\frown}{AB}$上，$\overset{\frown}{AB}$：$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$，$0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}$，$ds = a dt$.

在$\overline{BO}$上，$\overline{BO}$：$\begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases}$，$0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$ds = \sqrt{2}dx$.

故 $I = \int_0^a e^x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \cdot a dt + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x} \cdot \sqrt{2} dx = 2(e^a - 1) + \dfrac{\pi}{4} a e^a$.

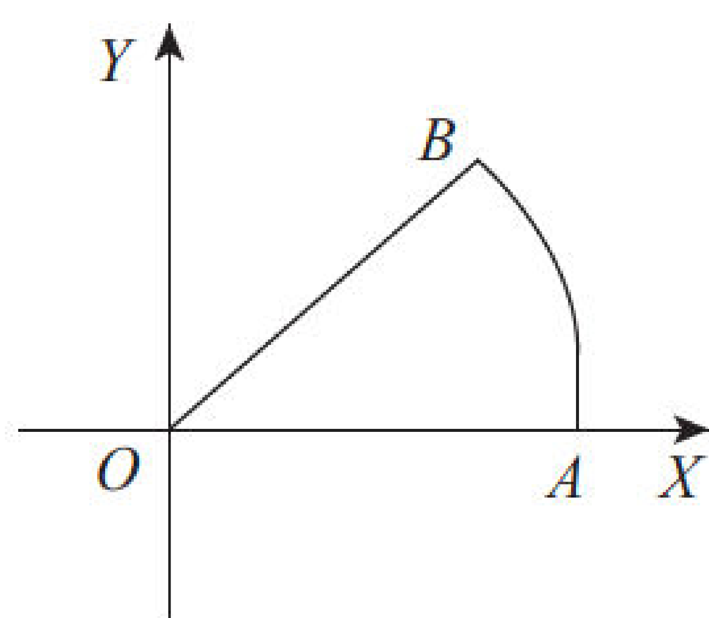


图 3.5.2

4. 设 L 为椭圆$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，其周长记为 a，求$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds$.

解：L 关于 x 轴对称，而函数 $2xy$ 是变量 y 的奇函数，所以由对称性可知

$$\oint_L 2xy\, ds = 0,$$

从而$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \oint_L (3x^2 + 4y^2) ds = 12\oint_L \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3}\right) ds.$

又因为 L 上的点都满足$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，所以

$$12\oint_L \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right) ds = 12\oint_L ds = 12a,$$

故$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = 12a$.

5. 计算下列对坐标的曲线积分.

(1) $\int_L xy\,dx + (y - x)dy$，其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 从点(0，0) 到点(1，1) 的弧段；

(2) $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$，其中 L 为抛物线 $y = x^2$ 上从点(−1，1) 到点(1，1) 的弧段；

(3) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$，其中 L 为 $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ 的上半部分顺时针方向；

(4) $\int_L (x^2 + y^2)dx - 2xy^2 dy$，其中 L 为从点(0，0) 到点(1，2) 的直线段 .

解：(1) $\int_L xy\,dx + (y - x)dy = \int_0^1 y^3 \cdot 2y dy + (y - y^2) dy$

$$= \int_0^1 (2y^4 + y - y^2) dy = \left[\frac{2}{5}y^5 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{17}{30}.$$

(2) $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy = \int_{-1}^1 [(x + x^2) + 2x(x - x^2)] dx$

$$= \int_{-1}^1 (x + 3x^2 - 2x^3) dx = 6\int_0^1 x^2 dx = 2.$$

(3) 由题意知 t 是从 $\pi\to 0$，则

$$\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_\pi^0[b^2\sin^2 t(-a\sin t)+a^2\cos^2 t(b\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=ab^2\int_0^\pi\sin^3 t\mathrm{d}t-a^2b\int_0^\pi\cos^3 t\mathrm{d}t$$

$$=-ab^2\int_0^\pi(1-\cos^2 t)\mathrm{d}(\cos t)-a^2b\int_0^\pi(1-\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=ab^2\left[\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right]_0^\pi-a^2b\left[\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^\pi=\frac{4}{3}ab^2.$$

(4) $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x-2xy^2\mathrm{d}y=\int_0^1(5x^2-16x^3)\mathrm{d}x=\left[\frac{5x^3}{3}-4x^4\right]_0^1=-\frac{7}{3}.$

6. 计算 $I=\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点$(-1,1)$到点$(1,1)$的一段弧．

解：L：$\begin{cases}x=x\\y=x^2\end{cases}$，当 $x=-1$ 时对应 L 的起点，当 $x=1$ 时对应 L 的终点，于是

$$I=\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)\cdot 2x]\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1(x^2-4x^4)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

7. 计算 $\oint_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为逆时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．

解：将椭圆的方程化为参数方程

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

其中，当 $t=0$ 时，对应曲线的起点；当 $t=2\pi$ 时，对应曲线的终点．

从而 $\oint_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}(-ab^2\sin^3 t+a^2b\cos^3 t)\mathrm{d}t$

$$=ab\int_{-\pi}^\pi(-b\sin^3 t+a\cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$=2a^2b\int_0^\pi\cos^3 t\mathrm{d}t=0.$$

8. 计算 $I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=1-|1-x|$ 上从点 $O(0,0)$ 经过点 $A(1,1)$到点 $B(2,0)$的有向折线段．

解：积分路径如图 3.5.3 所示：$L=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$，所以

$$I=\int_{\overrightarrow{OA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}.$$

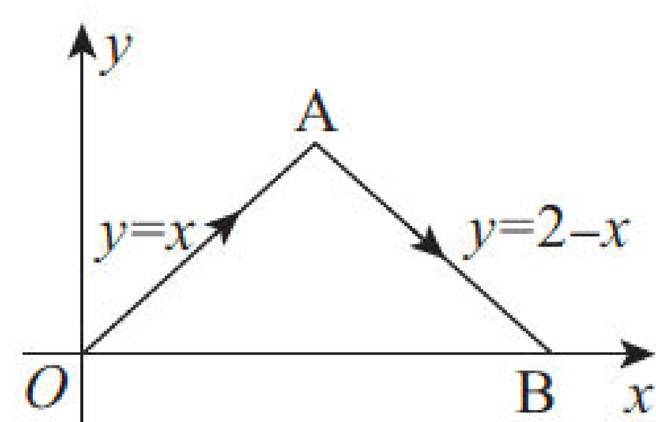


图 3.5.3

线段$\overline{OA}$的参数方程为$\begin{cases}x=x\\y=x\end{cases}$，当 $x=0$ 时对应起点，当 $x=1$ 时对应终点.

线段$\overline{AB}$的参数方程为$\begin{cases}x=x\\y=2-x\end{cases}$，当 $x=1$ 时对应起点，当 $x=2$ 时对应终点.

故 $I=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2 2(2-x)^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$.

3.6　格林公式及其应用

3.6.1　知识点概况

1. 格林公式

设平面闭区域 D(单、复连通区域均可)是由分段光滑曲线 L 所围成，函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

成立，这里曲线积分是按正向取的．

2. 平面上曲线积分与路径无关的条件

设函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$在单连通域 D 上有一阶连续偏导数，则在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关(或沿着 D 内任一闭合的曲线积分为零) 的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在 D 内恒成立．

3. 全微分方程

当 $P(x, y)$，$Q(x, y)$在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时，方程 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=0$ 成为全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在区域 G 内恒成立，且当此条件满足时，全微分方程的通解为

$$u(x, y)\equiv\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y=C.$$

其中，x_0，y_0 是在区域 G 内适当选定的点 M_0 的坐标．

3.6.2　习题解答

1. 利用格林公式计算下列曲线积分．

(1) $\oint_L xy^2\mathrm{d}x - x^2y\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的正向边界曲线；

(2) $\oint_L x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y^3=x^2$ 与 $y=x$ 所围成的正向边界曲线；

(3) $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - 3y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y + x)\mathrm{d}y$，其中 L 为从点(0，0)到点(0，2)的右半圆周 $x^2+y^2=2y$ 的正向边界曲线；

(4) $\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x + (5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三顶点分别为(0，0)，(3，0)，(3，2)的三角形正向边界；

(5) $\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$，其中 L 是以 $A(1，0)$，$B(0，1)$，$C(-1，0)$ 为顶点的正向三角形(逆时针方向为正)．

解： (1) 由题可知，$P(x,y)=xy^2$，$Q(x,y)=-x^2y$，以 L 所围成的区域 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$ 满足格林公式的条件，则有

$$\oint_L xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D(-4xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(r^2\sin\theta\cos\theta)r\,\mathrm{d}r = -a^4\int_0^{2\pi}(\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{a^4}{2}[\sin^2\theta]_0^{2\pi}=0\,.$$

(2) 由题可知，$P(x,y)=x^2y$，$Q(x,y)=y^3$，以 L 所围成的区域 D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$x\leqslant y\leqslant x^{\frac{2}{3}}$ 满足格林公式的条件，则有

$$\oint_L x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D(0-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x^{\frac{2}{3}}}x^2\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\left(x^{\frac{8}{3}}-x^3\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}\right]_0^1=-\frac{1}{44}.$$

(3) 记点(0，0)为 A，点(0，2)为 B，作从点 B 到点 A 的有向直线段 BA，与 L 围成半圆域 D 满足格林公式的条件，由题可知，$P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-3y$，$Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y+x$，则有

$$\oint_{L+BA}(e^x\sin y-3y)dx+(e^x\cos y+x)dy$$
$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=\iint_D[(e^x\cos y+1)-(e^x\cos y-3)]dxdy$$
$$=4\iint_D dxdy=4\times\frac{\pi}{2}\times 1^2=2\pi.$$

因为 $\int_{BA}(e^x\sin y-3y)dx+(e^x\cos y+x)dy=\int_2^0\cos ydy=[\sin y]_2^0=-\sin 2$,

所以 $\int_L(e^x\sin y-3y)dx+(e^x\cos y+x)dy=2\pi+\sin 2$,

(4) 由题可知，这里 $P(x, y)=2x-y+4$，$Q(x, y)=5y+3x-6$，由格林公式可知

$$I=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(5y+3x-6)-\frac{\partial}{\partial y}(2x-y+4)\right]dxdy$$
$$=4\iint_D dxdy=4\times\frac{1}{2}\times 3\times 2$$
$$=12.$$

(5) 该曲线积分满足格林公式的条件，由格林公式可得

$$\oint_L xy^2dy-x^2ydx=\iint_D(y^2+x^2)dxdy.$$

其中，D 为以 $A(1, 0)$，$B(0, 1)$，$C(-1, 0)$为顶点的三角形域，如图 3.6.1 所示.

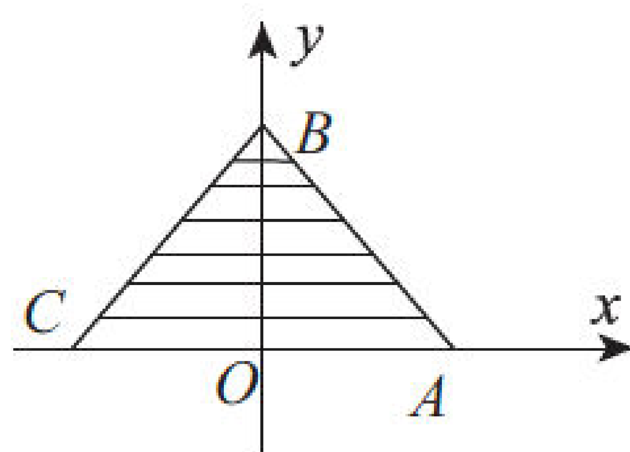


图 3.6.1

$$\iint_D(y^2+x^2)dxdy=2\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy=\frac{1}{3},$$

所以 $\oint_L xy^2dy-x^2ydx=\frac{1}{3}$.

2. 证明下列曲线积分与路径无关，并计算积分值.

(1) $\int_{(0, 1)}^{(2, 3)}(x+y)dx+(x-y)dy$;

(2) $\int_{(1, 0)}^{(6, 8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\int_{(\frac{\pi}{2}, 1)}^{(\pi, 2)}\frac{\cos x}{y}dx-\frac{\sin x}{y^2}dy$，其中 L 不经过 x 轴.

解：(1) 由题可知，$P(x, y)=x+y$，$Q(x, y)=x-y$，因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}$，则积分与路

径无关，取平行于坐标轴的折线的路径有

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y=\int_0^2(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2+\left[2y-\frac{1}{2}y\right]_1^3=7.$$

(2) 由题可知，$P(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$Q(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，因为除原点外均有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

则积分与路径无关，取平行于坐标轴的折线的路径有

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^6\mathrm{d}x+\int_0^8\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{6^2+y^2}}=5+\left[\sqrt{6^2+y^2}\right]_0^8=9.$$

(3) 由题可知，$P(x,y)=\dfrac{\cos x}{y}$，$Q(x,y)=-\dfrac{\sin x}{y^2}$，因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{\cos x}{y^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则积分与路径无关，但 $y\neq 0$，取平行于坐标轴的折线的路径有

$$\int_{(\frac{\pi}{2},1)}^{(\pi,2)}\frac{\cos x}{y}\mathrm{d}x-\frac{\sin x}{y^2}\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos x}{1}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{\sin\pi}{y^2}\mathrm{d}y=\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-1.$$

3. 求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$，其中 a，b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解：记 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)$，$Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-ax$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=b-a.$$

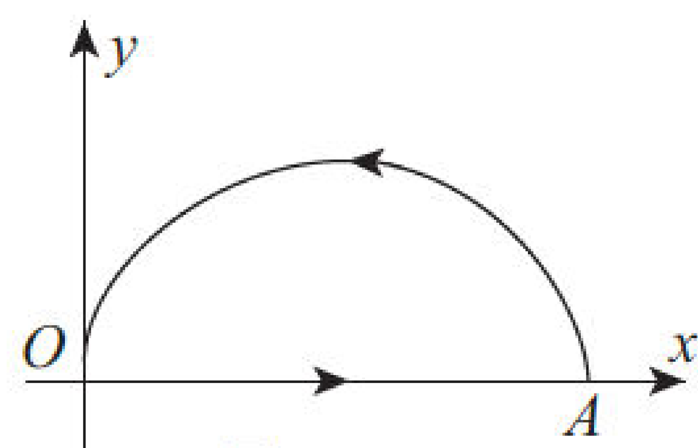


图 3.6.2

添加直线段$\overline{OA}$，则 $L+\overline{OA}$为闭曲线(如图 3.6.2 所示)，于是

$$I=\int_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}$$

$$=\iint_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2ba^2.$$

4. 计算曲线积分 $I=\int_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点$(1,0)$为中心、R 为半径的圆周$(R>1)$，取逆时针方向.

分析：在 L 所围成的区域 D 内的点$(0,0)$，格林公式的条件不满足．此时可以做一条简单封闭曲线 C 将该点“挖掉”，关键是 C 取什么样的曲线？(应由被积函数的形状决定).

解：令 $P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y-4x^2}{(4x^2+y^2)^2},\ (x,y)\neq(0,0).$$

令 C：$4x^2+y^2=\varepsilon^2$，取逆时针方向，则

$$I=\int_{L+C^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}-\int_{C^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_c}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi.$$

5. 计算 $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，其中 L 为任意一条不通过原点的简单光滑正向的封闭曲线.

解：设 $P=\dfrac{-y}{x^2+4y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+4y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，除去原点 $O(0,0)$ 以外一切点，上式都成立.

① 当曲线 L 的内部不含原点时，

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

② 当曲线 L 的内部含原点时，可在 L 的内部做一个充分小的椭圆 C：$x=2a\cos t$，$y=a\sin t$，从 $t=0$ 到 $t=2\pi$. 利用复连通域上的格林公式，有

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{1}{4a^2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{4a^2}\cdot 2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4a^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a\cdot a=\pi.$$

6. 计算 $\oint_L\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 $L=\overset{\frown}{ABCDA}$ 是以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$ 为顶点的正方形围线.

分析：在 L 所围成的区域 D 内的点 $(0,0)$，格林公式的条件不满足. 但注意到 L 上任何点都满足 $|x|+|y|=1$，如图 3.6.3 所示，所以可以将积分曲线的方程代入被积函数来化简（计算曲线（面）积分时，都可以利用曲线（面）方程化简算式）.

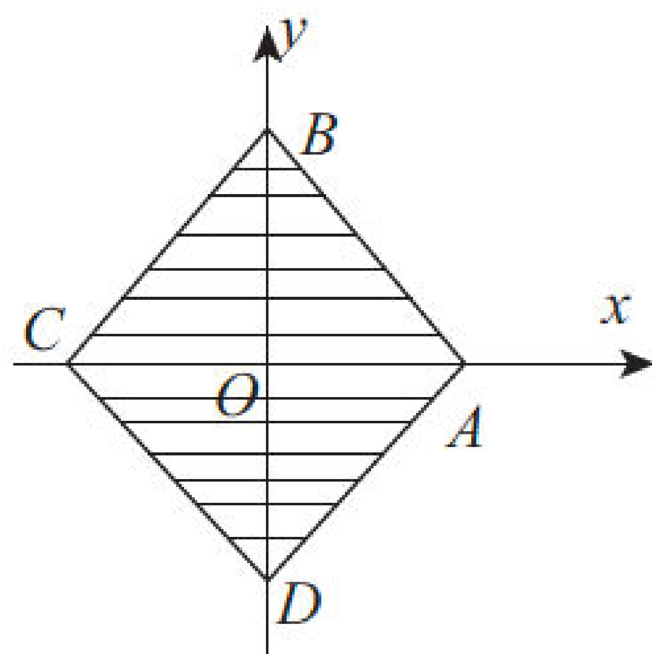


图 3.6.3

解：由于 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，所以

$$\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4.$$

7. 设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$ 具

有一阶连续导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$.

解：$P=xy^2$，$Q=y\varphi(x)$，由条件知 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，得 $2xy=y\varphi'(x)$，当 $y\neq0$ 时，$\varphi'(x)=2x$，$\varphi(x)=x^2+C$. 因为 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(x)=x^2$. 取直线段 OA：$y=x(0\leqslant x\leqslant1)$，由 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{\overline{OA}} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_0^1(x^3+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

8. 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

求 $Q(x,y)$.

解：由曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x,\ Q(x,y)=x^2+C(y),$$

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1+C(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y.$$

由题设知 $t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y$.

两边对 t 求导得

$$2t=1+C(t),\ C(t)=2t-1,$$

从而 $C(y)=2y-1$，所以 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

3.7　曲面积分

3.7.1　知识点概况

1. 对面积的曲面积分

（1）定义：设函数 $f(x, y, z)$在曲面Σ上有定义，将曲面Σ任意分成n块子曲面，记为$\Delta S_i(i=1, 2, \cdots, n)$，同时也表示第$i$块子曲面的面积；在每块子曲面上任取一点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i .$$

如果当子曲面的最大直径$\lambda\to 0$时，上述和式的极限存在，则称此极限值为函数$f(x, y, z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分，也称为第一类曲面积分，记作

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i.$$

其中，$f(x, y, z)$称为被积函数，$f(x, y, z)\mathrm{d}S$称为被积表达式，$\mathrm{d}S$称为曲面的面积元素，Σ称为积分曲面．如果曲面是封闭的，则曲面积分记为$\oiint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$．

（2）计算：设曲面Σ的方程为$z=z(x, y)$（z为单值函数），Σ在xOy平面上的投影区域为D_{xy}，函数$z=z(x, y)$在D_{xy}上具有连续的一阶偏导数，函数$f(x, y, z)$在曲面Σ上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. 对坐标的曲面积分

（1）定义：设函数$R(x, y, z)$定义在有向曲面Σ上，把曲面Σ任意分割成n块小曲面ΔS_i（ΔS_i表示第i张小曲面的面积），ΔS_i在xOy平面上投影为$\Delta S_{i_{xy}}$，(ξ_i, η_i, ζ_i)是ΔS_i上任取的一点．如果当各小块曲面的直径最大值$\lambda\to 0$时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在，则称此极限为函数$R(x, y, z)$在有向曲面Σ上对坐标x，y的曲面积分，记作

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}.$$
其中，$R(x, y, z)$叫做被积函数，Σ叫做积分曲面．

类似地，可以定义函数$P(x, y, z)$在有向曲面Σ上对坐标y，z的曲面积分
$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{yz}};$$
函数$Q(x, y, z)$在有向曲面Σ上对坐标z，x的曲面积分
$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}.$$

以上三个曲面积分也称为第二型曲面积分．

在实际应用中，经常将上面定义的三个积分合并起来用，因此我们将
$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
称为组合曲面积分，记作
$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 计算：设曲面Σ是由方程$z = z(x, y)$给出，当Σ取上侧时，则曲面的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴正向的夹角不大于$\frac{\pi}{2}\left(\text{大于}\frac{\pi}{2}\right)$，于是，曲面的面积元素$\Delta S_i$在$xOy$平面的投影$\Delta S_{i_{xy}}$为正(负)值．如果用$D_{xy}$表示曲面$\Sigma$在$xOy$平面上的投影区域，那么我们可将对坐标的曲面积分化成在xOy平面上区域D_{xy}的二重积分来计算，即
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3.7.2 习题解答

1. 求$\iint_{\Sigma}\sqrt{2 + z^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$介于$z = 0$及$z = 1$之间的部分.

解：曲面Σ在xOy坐标平面上的投影为D_{xy}：$x^2 + y^2 \leqslant 1$.
$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

故 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{2+z^2-x^2-y^2}\mathrm{d}S$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2+(\sqrt{x^2+y^2})^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{D_{xy}}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\cdot\pi=2\pi$.

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 割下的部分．

解： 设 Σ_1 表示 Σ 在第一卦限内部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta r^2\sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分．

解： Σ 写成 $z=4-2x-\frac{4}{3}y$，$z_x=-2$，$z_y=-\frac{4}{3}$，且

D_{xy}：$0\leqslant y\leqslant 3-\frac{3}{2}x$，$0\leqslant x\leqslant 2$，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+\left(2x+\frac{4}{3}y\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{61}}{8}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\sqrt{61}}{2}.$$

4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}z^3\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$．

解： Σ 在 xOy 面上的投影区域 D 为：$x^2+y^2\leqslant 1$.

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$I=\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

5. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所围成的立体表面的外侧．

解： 设 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，其中 Σ_1：$z=2$，$x^2+y^2\leqslant 4$，Σ_2：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$1\leqslant z\leqslant 2$，Σ_3：$z=1$，$x^2+y^2\leqslant 1$ 在面上的投影分别为

D_1：$x^2+y^2\leqslant 4$；　D_2：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$；　D_3：$x^2+y^2\leqslant 1$.

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\iint\limits_{D_1}\frac{e^2\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\iint\limits_{D_2}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\iint\limits_{D_3}\frac{e\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=e^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{1}{r}r\,dr+\left(-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2e^r\,dr\right)+\left(-e\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\right)=2\pi e^2\,.$$

6. 设 Σ 是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧($a>0$, $b>0$, $c>0$)，求

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dy\,dz+\frac{1}{y}dz\,dx+\frac{1}{z}dx\,dy\,.$$

解：设 Σ_1，Σ_2 是 Σ 的上半椭球面的上侧和下半椭球面的下侧，Σ_1，Σ_2 在 xOy 面的投影为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，则

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dx\,dy=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{1}{z}dx\,dy+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{1}{z}dx\,dy$$

$$=\frac{2}{c}\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$=\frac{2}{c}\cdot 4\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$=\frac{8}{c}\int_0^a\left(\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\Bigg|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)dx=\frac{4\pi abc}{c^2}.$$

同理得$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dy\,dz=\frac{4\pi abc}{a^2}$，$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}dz\,dx=\frac{4\pi abc}{b^2}$，所以 $I=4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

3.8　高斯公式与斯托克斯公式

3.8.1　知识点概况

1. 高斯公式

设空间区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

其中，曲面积分取在闭曲面 Σ 的外侧 .

2. 斯托克斯公式

设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 L 为边界的分片光滑的有向曲面，L 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，函数 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$， $R(x, y, z)$在曲面 Σ(连同边界 L)上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

3.8.2　习题解答

1. 利用高斯公式求下列曲面积分.

(1) 求 $\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内侧；

解： $\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}a^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a^2\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

由高斯公式得：

原式 $=a^2\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

(2) 求 $\oiint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧；

解： 由已知得 $P=x$，$Q=y$，$R=z$，则$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=1$.

由高斯公式得：

$$\text{原式}=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=4\pi a^3.$$

(3) 求 $\iint\limits_{\Sigma}2xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(9-z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2+1(1\leqslant z\leqslant 2)$ 的下侧；

解：补充 Σ_1：$\begin{cases}z=2,\\x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$ 取上侧

$$\iint\limits_{\Sigma}2xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(9-z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left\{\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\right\}2xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(9-z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v-\iint\limits_{D_{xy}}(9-2^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\pi(z-1)\mathrm{d}z-\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

(4) 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧；

解：取 Σ_1 为 xOy 平面上圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由高斯公式知：

$$I+\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(z+r)r\mathrm{d}z$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]\mathrm{d}r=2\pi.$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$，

因此 $I=2\pi-3\pi=-\pi$.

(5) 求 $\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解：记 Ω：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2$，利用高斯公式，有

$$\text{原式}=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由重心坐标$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=(a, b, c)$得

$$\text{原式}=2(a+b+c)\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3 .$$

2. 利用斯托克斯公式计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看，L 为逆时针方向。

解： 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标平面上的投影，如图 3.8.1 所示，由斯托克斯公式得

$$I=\iint_S(-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-12\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24 .$$

$$\left(\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

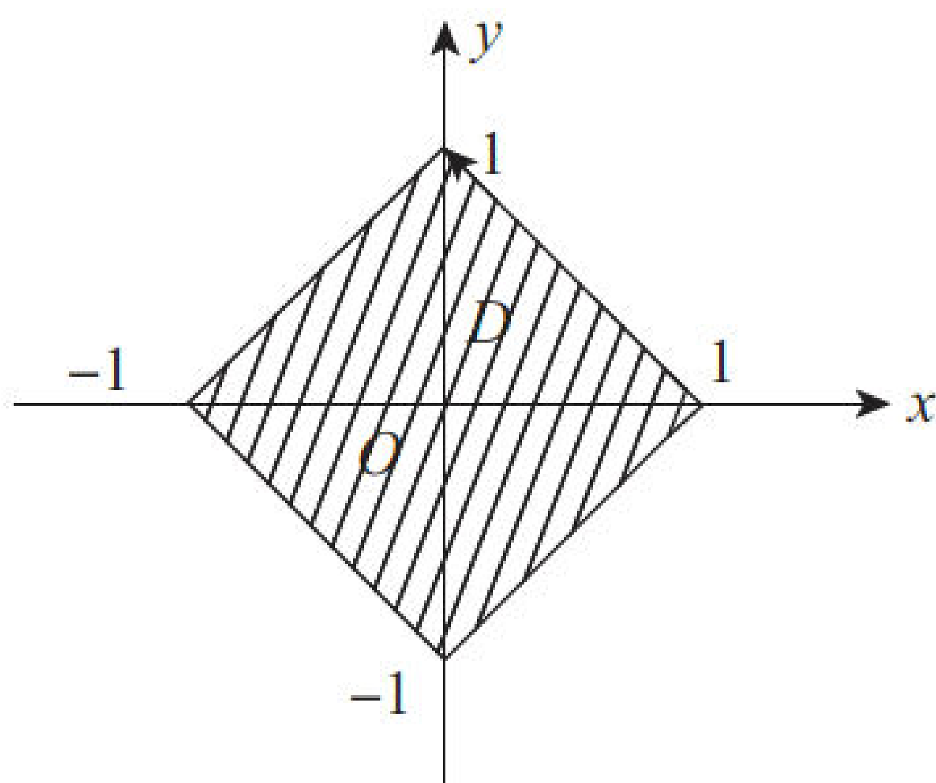


图 3.8.1

3. 设 $f(u)$具有连续导函数，计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y ,$$

其中 Σ 为 $x>0$ 的锥面 $x^2=y^2+z^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ 所围成立体表面的外侧 .

解： $P=x^3$，$Q=\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3$，$R=\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3$.

$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2$，$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2$，$\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2$.

由高斯公式得

$$I=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}v=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^4\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi .$$

3.9 总习题解答

1. 选择题

(1) 设积分区域 D 是由 $|x|=1$，$|y|=1$ 所围成，则下列不等式正确的是(　　).

(A) $\iint\limits_D (x+1)\,d\sigma \geqslant 0$　　　(B) $\iint\limits_D (x-1)\,d\sigma \geqslant 0$

(C) $\iint\limits_D (y-1)\,d\sigma \geqslant 0$　　　(D) $\iint\limits_D (-x^2-y^2)\,d\sigma \geqslant 0$

(2) 设积分区域 D 是由 x 轴，y 轴，$x=1$，$y=2$ 所围成，则 $\iint\limits_D xy\,d\sigma=$(　　).

(A) 4　　(B) 2　　(C) 1　　(D) -1

(3) 二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$ 等于(　　).

(A) $\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$　　　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{1-x} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$　　　(D) $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$

(4) 设积分区域 D 是由 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 $y\geqslant 0$ 所围成，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ 可以表示为(　　).

(A) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^a \rho^2 d\rho$　　　(B) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^a \rho^3 d\rho$

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^a \rho^2 d\rho$　　　(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^a \rho^3 d\rho$

解：(1)A　(2)C　(3)C　(4)B

2. 计算 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中 D 是由曲线 $xy=1$，$x+y=\dfrac{5}{2}$ 所围区域．

解：积分区域 D 如图 3.9.1 所示。

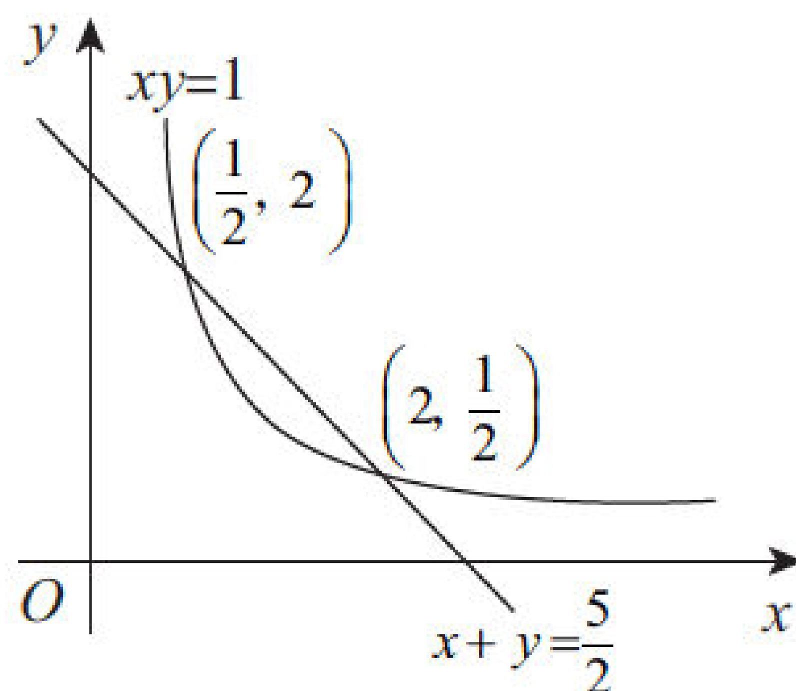


图 3.9.1

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy\,dxdy &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\,dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[x\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-\frac{1}{x}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{25}{8}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}\\ &= \frac{165}{128}-\ln 2\,.\end{aligned}$$

3. 计算$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$由$x^2+y^2=2ax\,(a>0)$与$x$轴围成上半圆区域.

解: D在极坐标系中$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$,$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta$,如图3.9.2所示.

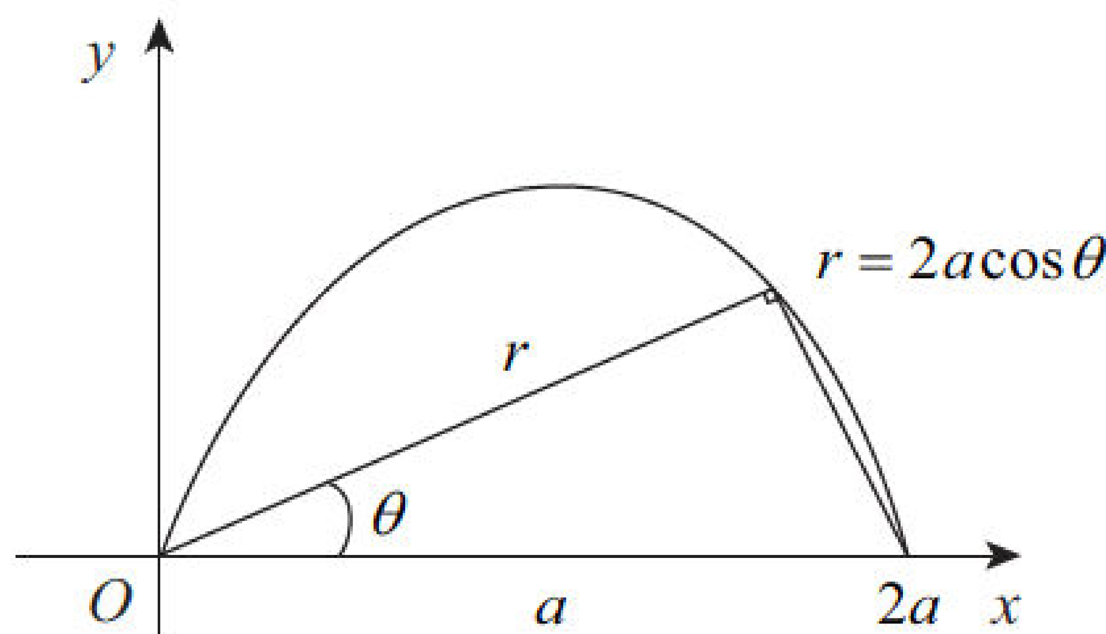


图 3.9.2

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\Big|_0^{2a\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{2}{3}a^3\cos^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}a^3\,.
\end{aligned}
$$

4. 求二重积分$\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值,其中$D$是由直线$y=x$,$y=-1$及$x=1$围成的平面区域.

解: 平面区域D可表示为:$\begin{cases}-1\leqslant y\leqslant 1,\\ y\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

则 $I=\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$

其中,$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y(1-y)\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}\,.$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_y^1 x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 y\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+y^2)}-\mathrm{e}^{y^2}\right]\mathrm{d}y \\
&= 0\quad(\text{被积函数是 } y \text{ 的奇函数}),
\end{aligned}
$$

所以$I=-\frac{2}{3}$.

5. 计算$\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由曲面$z=xy$,$y=x$,$x=1$,$z=0$所围的区域.

解: $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\mathrm{d}z$

$$
=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{4}x^5y^6\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{28}x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}\,.
$$

6. 计算$\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由曲面$x^2+y^2+z^2=z$所围的区域.

解：用球坐标（Ω 的球坐标方程 $\rho^2=\rho\cos\theta$ 化简为 $\rho=\cos\theta$），

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\rho^3\sin\theta\mathrm{d}\rho .$$

7. 求 $\int_L xe^y\mathrm{d}s$，其中 L 是由$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}$ $(a>0)$ 所表示的曲线上相应于$\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}$的一段弧 .

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t}\mathrm{d}t=a\mathrm{d}t$，

故 原式$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}a\cos t\cdot e^{a\sin t}\cdot a\mathrm{d}t=ae^{a\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=0.$

8. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}z^3\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D：$x^2+y^2\leqslant 1.$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

9. 设函数 $\varphi(y)$具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数。

(1) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 L，有

$$\oint_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(2) 求函数 $\varphi(y)$的表达式.

(1) **证明**：如图 3.9.3 所示，设 L 是半平面 $x>0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线，在 L 上任意取定两点 M，N，作围绕原点的闭曲线$\overparen{MQNRM}$，同时得到另一围绕原点的闭曲线$\overparen{MQNPM}$. 根据题设可知

$$\oint\limits_{MQNRM}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint\limits_{MQNPM}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0.$$

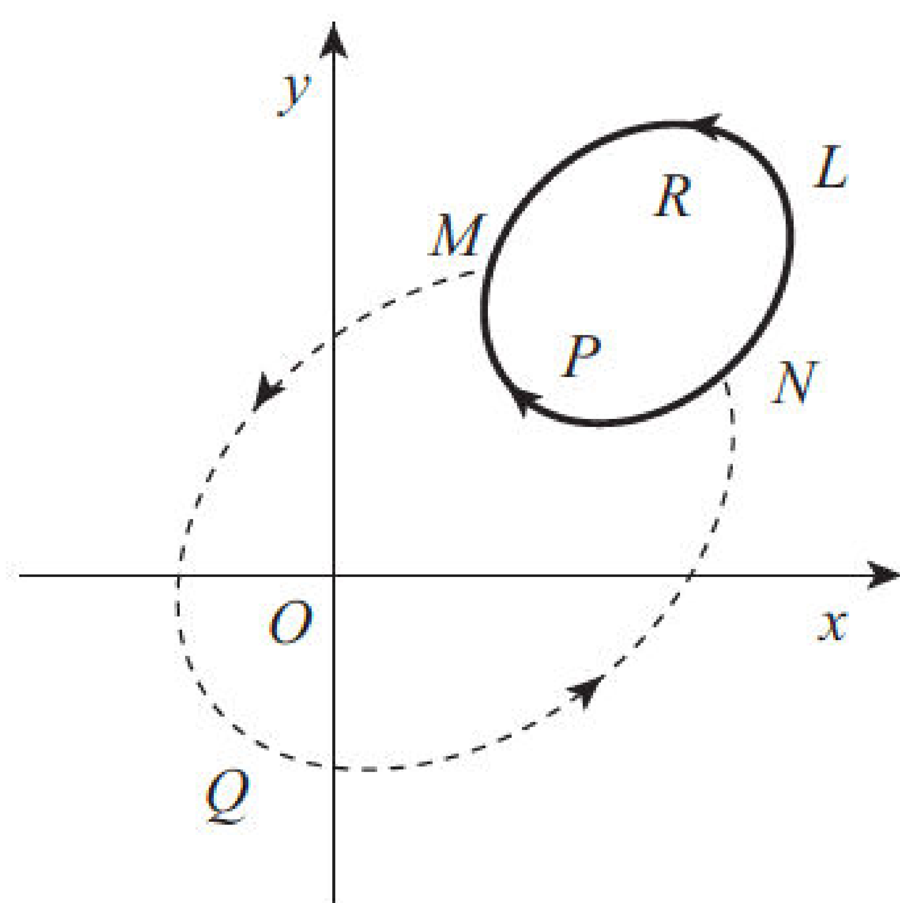


图 3.9.3

根据第二类曲线积分的性质，利用上式可得

$$\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{\overset{\frown}{NRM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}+\int_{\overset{\frown}{MPN}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\int_{\overset{\frown}{NRM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\int_{\overset{\frown}{NPM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$=0.$

（2）**解：**设 $P=\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}$，$Q=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P$，$Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数.

由(1)知，曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 在该区域与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y(2x^2+y^4)-4x\cdot 2xy}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}, \quad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}, \quad ②$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y, & ③\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5. & ④\end{cases}$$

由③得 $\varphi(y)=-y^2+c$，将 $\varphi(y)$代入④得 $2y^5-4cy^3=2y^5$，

所以 $c=0$，从而 $\varphi(y)=-y^2$.

10. 设 Σ 为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，Π 为 Σ 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$为原点到 Π 的距离，求$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解：先求出 $\rho(x,y,z)$，设(X,Y,Z)为 Π 上任一点，则 Π 的方程为

$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$，即 $\frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ-1=0$.

$$\rho(x,y,z)=\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

由 Σ 的方程 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$，于是

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma.$$

这样$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint\limits_{D}(4-x^2-y^2)d\sigma$.

区域 D：$x^2+y^2\leqslant(\sqrt{2})^2$，所以

$$原式=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3}{2}\pi.$$

第4章　无穷级数

无穷级数是微积分的一个重要内容，是表示函数、研究函数的性质、进行数值计算以及求解微分方程的一种数学工具，它不仅对数学，而且对物理学、力学、生物学、经济学等学科的发展都有重大的影响．无穷级数的内容包括常数项级数和函数项级数．本章首先介绍常数项级数的概念与性质，然后讨论函数项级数中的幂级数和傅里叶级数的相关内容．

4.1　常数项级数的概念和性质

4.1.1　知识点概况

1. 常数项级数

（1）概念：设有数列$\{a_n\}$：a_1，a_2，…，a_n，…，将该数列的各项依次用加号连接所成的表达式$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$称为常数项无穷级数，简称常数项级数或级数，记作$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

其中，a_n称为级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的通项或一般项.

（2）收敛：若部分和数列$\{s_n\}$有极限s，即$\lim_{n\to\infty}s_n=s$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

2. 收敛级数的基本性质

性质1　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛于和s，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}ka_n$也收敛，其和为ks，其中$k\in\mathbf{R}$.

性质2　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，其和分别为s和σ，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$也收敛，其

和为 $s\pm\sigma$.

性质 3 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 前去掉、加上或改变有限项后得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 敛散性不变.

性质 4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则对该级数任意加括号后所形成的级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=(a_1+\cdots+a_{i_1})+(a_{i_1+1}+\cdots+a_{i_2})+\cdots+(a_{i_{n-1}+1}+\cdots+a_{i_n})+\cdots$ 仍收敛.

推论 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 任意加括号后所形成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

3. 级数收敛的条件

柯西收敛原理 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\forall n>N,\ \forall p\in\mathbf{N}_+$，都有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$ 成立.

4.1.2 习题解答

1. 写出下列级数的通项：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$;

解： $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$, $(n=1,2,\cdots)$.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$;

解： $u_n=\frac{n}{n^2+1}$, $(n=1,2,\cdots)$.

(3) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{x}{4\cdot7}+\frac{x^2}{7\cdot10}+\frac{x^3}{10\cdot13}+\cdots$;

解： $u_n=\frac{x^{n-1}}{(3n-2)(3n+1)}$, $(n=1,2,\cdots)$.

(4) $2-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}-\frac{2^4}{4!}+\cdots$.

解： $u_n=(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n!}$, $(n=1,2,\cdots)$.

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\frac{3n}{n+1}$，试写出此级数，并求其和.

解： 由 $u_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{n(n+1)}(n\geqslant2)$，而 $u_1=S_1=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{1\times2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 3$.

3. 判断下列级数的敛散性．若级数收敛，求其和．

(1) $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots + \sqrt[n]{0.001} + \cdots$;

解： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$，所以级数发散．

(2) $\frac{4}{5} - \frac{4^2}{5^2} + \frac{4^3}{5^3} - \frac{4^4}{5^4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{4^n}{5^n} + \cdots$;

解： 公比 $q = -\frac{4}{5}$，$|q| = \frac{4}{5} < 1$，所以级数收敛，和为 $\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{4}{9}$.

(3) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots$;

解： $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1 \neq 0$，所以级数发散．

(4) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$;

解： $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$，所以级数发散.

(5) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots$.

解： $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$，公比 $q = \frac{1}{2} < 1$，所以级数收敛，和为 $\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$，公比 $q = \frac{1}{3} < 1$，所以级数收敛，和为 $\frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

所以 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots$ 收敛，和为 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

4.2 常数项级数的审敛法

4.2.1 知识点概况

1. 正项级数的定义

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项都是非负的，即 $a_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数．

2. 正项级数收敛的基本定理

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界．

3. 正项级数的审敛法

(1) 比较审敛法：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\exists N \in \mathrm{N}^+$，$\forall n \geqslant N$，有 $a_n \leqslant kb_n$，其中 k 是正常数．

① 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛；

② 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必发散．

(比较审敛法的极限形式)　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(b_n > 0)$ 满足

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l(0 \leqslant l \leqslant \infty)$.

① 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性相同；

② 若 $l = 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

③ 若 $l = +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散．

(2) 比值审敛法：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n > 0)$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

① 若 $\rho < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

② 若 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

③ 若 $\rho = 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性待定．

（3）根值审敛法：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.

① 若 $\rho < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

② 若 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

③ 若 $\rho = 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性待定．

4. 交错级数及审敛法

（1）定义：称各项正负交错的级数为交错级数，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n (a_n > 0)$.

（2）审敛法（莱布尼茨判别法）：若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 满足条件

① $a_n \geqslant a_{n+1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$；

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，且其和 $s \leqslant a_1$，余项 r_n 满足 $|r_n| \leqslant a_{n+1}$.

5. 任意项级数

（1）定义：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中各项为任意实数，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为任意项级数．

（2）绝对收敛、条件收敛：若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 各项取绝对值后形成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛．若级数 $\sum_{a=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

（3）审敛法：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必定收敛．

4.2.2 习题解答

1. 用比较审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

解: $u_n=\frac{1}{2n-1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\in(0,+\infty).$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$;

解: $u_n=\frac{1}{n^2+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\in(0,+\infty).$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$收敛.

(3) $1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{2^3}{3\cdot5\cdot7}+\frac{2^4}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}+\cdots$;

解: $\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$收敛，由比较审敛法，原级数收敛.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

解: $u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$发散.

(5) $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot3^2}+\frac{2^3}{5\cdot3^3}+\frac{2^4}{7\cdot3^4}+\cdots$;

解: $u_n=\dfrac{2^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{(2n-1)\cdot 3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛，由比较审敛法，原级数收敛 .

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

解: $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n<\left(\dfrac{n}{2n}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$收敛，由比较审敛法，原级数收敛 .

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

解: $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n\sqrt{n+1}}=1\in(0,+\infty).$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$收敛 .

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

解: $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\in(0,+\infty).$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$发散 .

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$.

解: $u_n=\dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}\in(0,+\infty).$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$ 收敛 .

2. 用比值审敛法判定下列各级数的敛散性.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$；

解： $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}<1.$$

原级数收敛 .

(2) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$；

解： $u_n=\frac{1}{n!}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

原级数收敛 .

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$；

解： $u_n=\frac{1}{(2n+1)!}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}=0<1.$$

原级数收敛 .

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}$；

解： $u_n=\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}}{\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}(2n-1)}{2^{2n+1}(2n+1)}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)}{(2n+1)}=\frac{1}{4}<1.$$

原级数收敛．

(5) $\frac{2}{1000}+\frac{2^2}{2000}+\frac{2^3}{3000}+\frac{2^4}{4000}+\cdots$;

解： $u_n=\frac{2^n}{1000n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{1000(n+1)}}{\frac{2^n}{1000n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{1000(n+1)}\cdot\frac{1000n}{2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{1000(n+1)}=2>1.$$

原级数发散．

(6) $1+\frac{5}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\frac{5^3}{4!}+\cdots$;

解： $u_n=\frac{5^{n-1}}{n!}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^n}{(n+1)!}}{\frac{5^{n-1}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^{n-1}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

原级数收敛．

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)!}{(2n)!}$;

解： $u_n=\frac{n!}{(2n)!}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=0<1,$$

原级数收敛．

(8) $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\frac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots$;

解： $u_n=\frac{2^n}{n(n+1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2^n}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=2>1.$$

原级数发散．

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$.

解： $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin \frac{\pi}{3^n}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

原级数收敛．

3. 判定下列交错级数的敛散性.

(1) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$；

解： $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$，$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$u_n > u_{n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$，由交错级数的莱布尼茨判别法知级数收敛．

(2) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots$；

解： $u_n = \frac{1}{n!}$，$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

$u_n > u_{n+1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$，由交错级数的莱布尼茨判别法知级数收敛．

(3) $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$.

解： $u_n = \frac{n}{2n-1}$，

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1} \neq 0.$$

由级数收敛的必要条件知级数发散．

4. 判定下列级数哪些是绝对收敛，哪些是条件收敛？

(1) $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$；

解： 将级数的每一项添加绝对值后，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 是正项级数.

由比值审敛法：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{\frac{1}{(2n-1)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{(2n+1)^2}=1$，比值审敛法失效，改用比较审敛法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\in(0,+\infty).$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$收敛，所以原级数绝对收敛 .

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$;

解：将级数的每一项添加绝对值后，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$是正项级数.

由比值审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$收敛，原级数绝对收敛 .

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$;

解：将级数的每一项添加绝对值后，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$是正项级数.

由比较审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$发散，

原级数 $u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$，$u_{n+1}=\frac{1}{\ln(n+2)}$.

$u_n>u_{n+1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0$，由交错级数的莱布尼茨判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$收敛，所以原级数是条件收敛 .

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(n+1)^2}$;

解：将级数的每一项添加绝对值后，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{(n+1)^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{(n+1)^2}$ 是正项级数.

因为$\frac{|\sin n\alpha|}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}$，

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1\in(0,+\infty)$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ 收敛，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{(n+1)^2}$ 收敛，原级数绝对收敛．

(5) $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{10^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{3}{10^3}+\cdots$;

解：将级数的每一项添加绝对值后成为级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{10^n}\right)$，是正项级数，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$ 收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{3}{10^n}\right)$收敛，所以原级数绝对收敛．

(6) $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\frac{121}{64}-\cdots=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$.

解：将级数的每一项添加绝对值后，

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$$

是正项级数，

由比值审敛法，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+3)^2}{2^{n+2}}}{\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2},$$

所以$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$ 收敛，所以原级数绝对收敛．

4.3 幂级数

4.3.1 知识点概况

1. 函数项级数

设$\{a_n(x)\}$是定义在区间D上的函数列，将$\{a_n(x)\}$中各项依次用加号连接起来，称表达式

$$a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)+\cdots$$

为函数项无穷级数，简称函数项级数，记作$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，其中$a_n(x)$称为它的通项，前$n$项和$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$称为它的部分和．

2. 幂级数形式

一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

令$y=x-x_0$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_ny^n+\cdots.$$

为方便起见，只讨论形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的幂级数，其中$a_0,a_1,a_2,\cdots$称为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的系数，它们均为实数．

3. 幂级数的收敛性

(1) 阿贝尔定理

① 若级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x_0\neq 0$处收敛，则$\forall x$：$|x|<|x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$都绝对收敛．

② 若级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x_0\neq 0$处发散，则$\forall x$：$|x|>|x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$都发散．

(2) 收敛半径：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的系数满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$，则

它的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho},\ \rho\neq 0,\\ +\infty,\ \rho=0,\\ 0,\ \rho=+\infty.\end{cases}$$

4. 幂级数的运算

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，令 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n$，$\lambda$ 为常数，$|x|<R$；

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R$；

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$，$|x|<R$；

$\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $b_0\neq 0$，$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kc_{n-k}$，$|x|<R_0$，$R_0$ 比 R_1 和 R_2 都小.

5. 幂级数和函数的性质

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R>0$，则其和函数 $s(x)$ 满足：

(1) 在收敛区间$(-R,R)$上连续；

(2) 在收敛区间$(-R,R)$内可逐项求导，即 $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,a_nx^{n-1}$，$x\in(-R,R)$；

(3) 在收敛区间$(-R,R)$内可逐项积分，且$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x x^n\mathrm{d}x$，$x\in(-R,R)$.

4.3.2 习题解答

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$；

解：$u_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|.$$

当 $|x|<1$ 时，级数收敛.

当 $|x|=1$ 时，即 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 收敛.

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ 发散.

所以幂级数的收敛域为 $(-1,1]$，收敛半径为 $R=1$.

(2) $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\cdots$；

解： $u_n(x)=\frac{x^n}{(2n)!}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^n}{(2n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{x^n}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}=0<1,$$

所以幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，收敛半径为 $R=\infty$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$；

解： $u_n(x)=\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}}{\dfrac{x^n}{(2n-1)(2n)}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{(2n-1)(2n)}{x^n}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)(2n+2)}=|x|.$$

当 $|x|<1$ 时，级数收敛.

当 $|x|=1$ 时，即 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)}$ 收敛；

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n)}$ 收敛.

所以幂级数的收敛域为$[-1, 1]$，收敛半径为 $R=1$.

(4) $\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}+\cdots$；

解： $u_n(x)=\frac{x^{n-1}}{2^n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{2^{n+1}}}{\frac{x^{n-1}}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^{n-1}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{|x|}{2}.$$

当 $|x|<2$ 时，级数收敛.

当 $|x|=2$ 时，即 $x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散；

$x=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2}$ 发散.

所以幂级数的收敛域为$(-2, 2)$，收敛半径为 $R=2$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$；

解： $u_n(x)=\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^n}{3^n(n+1)}}{\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{3^n(n+1)}\cdot\frac{3^{n-1}n}{x^{n-1}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}$$

$$=\frac{|x|}{3}.$$

当 $|x|<3$ 时，级数收敛.

当 $|x|=3$ 时，即 $x=3$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^{n-1}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

$x=-3$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{3^{n-1}n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛.

所以幂级数的收敛域为$[-3, 3)$，收敛半径为 $R=3$.

(6) $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^2}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^3}{5^3\sqrt{4}}+\cdots$；

解： $u_n(x)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{5^{n-1}\sqrt{n}}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot\dfrac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}}}{(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^{n-1}}{5^{n-1}\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{5^n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{5^{n-1}\sqrt{n}}{x^{n-1}}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{n+1}}=\frac{|x|}{5}.$$

当 $|x|<5$ 时，级数收敛.

当 $|x|=5$ 时，即 $x=5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{5^{n-1}}{5^{n-1}\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收敛；

$x=-5$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(-5)^{n-1}}{5^{n-1}\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

所以幂级数的收敛域为$(-5,5]$，收敛半径为 $R=5$.

(7) $1+\dfrac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\dfrac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\dfrac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\dfrac{16x^4}{\sqrt{17\cdot 5^4}}+\cdots$；

解： $u_n(x)=\dfrac{2^n x^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{(4n+5)\cdot 5^{n+1}}}}{\dfrac{2^n x^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{(4n+5)\cdot 5^{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}{2^n x^n}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}{\sqrt{(4n+5)\cdot 5^{n+1}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}|x|.$$

当 $|x|<\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，级数收敛.

当 $|x|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，即 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(4n+1)}}$ 发散；

$x=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{(4n+1)}}$ 收敛.

所以幂级数的收敛域为$\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$，收敛半径为 $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$；

解： $u_n(x)=\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln(n+2)}{n+2}x^{n+2}}{\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+2)}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\ln(n+1)}\cdot\frac{x^{n+2}}{x^{n+1}}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=|x|.$$

当 $|x|<1$ 时，级数收敛.

当 $|x|=1$ 时，即 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(n+1)}{n+1}=\infty$，

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 发散；

$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot(-1)^{n+1}$ 是交错级数，由交错级数的莱布尼茨判别法知级数收敛. 所以幂级数的收敛域为 $[-1,1)$，收敛半径为 $R=1$.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$；

解： $u_n(x)=\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{5^{n+1}+(-3)^{n+1}}{n+1}x^{n+1}}{\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{[5^{n+1}+(-3)^{n+1}]x^{n+1}}{[5^n+(-3)^n](n+1)}\cdot\frac{n}{x^n}\right|$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]n}{5^n\left[1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right](n+1)}=5|x|.$$

当 $|x|<\frac{1}{5}$ 时，级数收敛.

当 $|x|=\frac{1}{5}$ 时，即 $x=\frac{1}{5}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}\cdot\frac{1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-3)^n}{n\cdot 5^n}\right]$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 5^n}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-3)^n}{n\cdot 5^n}\right]$ 发散；

$x=-\frac{1}{5}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}\cdot\frac{1}{(-5)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{3^n}{n\cdot 5^n}\right]$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收

敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 5^n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{3^n}{n\cdot 5^n}\right]$收敛.

所以幂级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$，收敛半径为$R=\frac{1}{5}$.

另解：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}x^n$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}x^n$ 的收敛域为$\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}x^n$ 的收敛域为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

所以原幂级数的收敛域为$\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$，收敛半径为$R=\frac{1}{5}$.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+3^nx^n\right]$；

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+3^nx^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}3^nx^n$.

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}x^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2^n}x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^n}\right|=\frac{|x|}{2}$.

当$|x|<2$时，级数收敛，收敛半径为$R=2$.

对于$\sum_{n=1}^{\infty}3^nx^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{3^nx^n}\right|=3|x|$.

当$|x|<\frac{1}{3}$时，级数收敛，收敛半径为$R=\frac{1}{3}$.

当$x=-\frac{1}{3}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{6^n}+(-1)^n\right]$发散.

当$x=\frac{1}{3}$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^n}\left(\frac{1}{3}\right)^n+3^n\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{6^n}+1\right]$发散.

所以原级数的收敛域为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，收敛半径为$R=\frac{1}{3}$.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$；

解：$u_n(x)=\frac{(x-2)^n}{n^2}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(x-2)^n}\right| = |x-2|.$$

当 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$ 时，级数收敛；

当 $|x-2|=1$ 时，即 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛.

$x=3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

所以幂级数的收敛域为$[1,3]$，收敛半径为 $R=1$.

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n x^{2n}$.

解： $u_n(x)=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n x^{2n}$；

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\cdot 2^{n+1}x^{2n+2}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n x^{2n}}\right|$$

$$=2|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=2|x|^2.$$

当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数收敛.

当 $|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，即 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

所以幂级数的收敛域为$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n(x+3)^{2n}$；

解： $u_n(x)=2^n(x+3)^{2n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x+3)^{2n+2}}{2^n(x+3)^{2n}}\right| = 2|x+3|^2.$$

当 $|x+3|<\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $-3-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<-3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数收敛.

当 $|x+3|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，即 $x=-3-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散；

$x=-3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1$ 发散.

所以幂级数的收敛域为 $\left(-3-\frac{1}{\sqrt{2}},-3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$.

解： $u_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{(2x-3)^{n+1}}{2n+1}}{(-1)^{n-1}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-3)^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(2x-3)^n}\right|=|2x-3|.$$

当 $|2x-3|<1$，即 $1<x<2$ 时，级数收敛.

当 $|2x-3|=1$ 时，即 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$ 发散；

$x=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛.

所以幂级数的收敛域为 $(1,2]$，收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

2. 求下列幂级数的收敛域，并求和函数.

(1) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$；

解： 设 $s(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$.

$s'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}$，$-1<x<1$.

两边积分：$\int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

$s(x)-s(0)=\arctan x$，而 $s(0)=0$，所以

$s(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\arctan x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) $2x+4x^3+6x^5+8x^7+\cdots$；

解： 设 $s(x)=2x+4x^3+6x^5+8x^7+\cdots$.

两边积分：$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x=x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots=\frac{x^2}{1-x^2}$，$-1<x<1$.

两边求导：$s(x)=\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)'=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$，

$s(x)=2x+4x^3+6x^5+8x^7+\cdots=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$，$(-1<x<1)$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$；

解：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$.

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=2+6x+12x^2+20x^3+\cdots$.

两边积分：$\int_0^x s(x)\,\mathrm{d}x=2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots=h(x)$.

两边再积分：$\int_0^x h(x)\mathrm{d}x=x^2+x^3+x^4+\cdots=\dfrac{x^2}{1-x}$.

两边求导：$h(x)=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.

两边再求导：$s(x)=\left[\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right]'=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$，$(-1<x<1)$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$.

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^n$，$(x\neq 0)$.

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^n=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2\times 2^2}x^2+\dfrac{1}{3\times 2^3}x^3+\dfrac{1}{4\times 2^4}x^4+\cdots$.

两边求导：$s'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}x+\dfrac{1}{2^3}x^2+\dfrac{1}{2^4}x^3+\cdots=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2-x}$，$\left(-1<\dfrac{x}{2}<1\right)$.

两边积分：$\int_0^x s'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\dfrac{1}{2-x}\mathrm{d}x$.

$s(x)-s(0)=-\ln(2-x)\big|_0^x=\ln 2-\ln(2-x)$，而 $s(0)=0$，

$s(x)=\ln 2-\ln(2-x)=\ln\dfrac{2}{2-x}$，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^n=\dfrac{1}{x}\left(\ln\dfrac{2}{2-x}\right)$.

$x=-2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}(-2)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2}$ 收敛；

$x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}(2)^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2}$ 发散，

所以 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}=\begin{cases}\frac{1}{x}\left(\ln\frac{2}{2-x}\right), & x\neq 0, (-2\leqslant x<2),\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

4.4 函数展开成幂级数

4.4.1 知识点概况

1. 泰勒级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒级数，记作 $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

2. 麦克劳林级数

当 $x_0=0$ 时，称泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为麦克劳林级数．

3. 函数展成泰勒级数的条件

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式的余项满足 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

设函数 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 内具有一致有界的各阶导数，即存在 $K>0$，对任意 $x\in(-R,R)$，都有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant K(n=0,1,2,\cdots)$，则 $f(x)$ 在 $(-R,R)$ 内能展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

4. 初等函数的幂级数展开式

(1) 直接展开方法

对形式比较简单的函数，可以直接计算它的泰勒系数，得到它的泰勒级数，再根据定理将其展开成泰勒级数．具体步骤如下：

① 求函数 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)$，若在求解的过程中发现有某个 $f^{(k)}(0)$ 不存在，则不再进行，函数不能展开成幂级数．

② 求出 $f(0)$ 及 $f^{(n)}(0)$．

③ 写出麦克劳林级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，并求出其收敛半径 R.

④ 考察在收敛区间 $(-R,+R)$ 内，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 是否为零，若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n.$$

(2) 间接展开法

对于较复杂的函数，根据函数展开成的幂级数的唯一性，可以从一些已知函数的幂级数展开式出发，通过变量代换、四则运算或逐项求导、逐项求积分等方法，间接地将其展开成泰勒级数．间接展开法是求函数的泰勒展开式的常用方法．

4.4.2 习题解答

1. 利用已知展开式把下列函数展开为 x 的幂级数，并确定收敛域.

(1) $f(x)=a^x$，$(a>0, a\neq 1)$；

解：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty, +\infty)$.

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n,\ x\in(-\infty, +\infty).$$

(2) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$；

解：$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$，$x\in(-\infty, +\infty)$，

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\cdots+(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{3!\cdot 2^3}x^3+\frac{1}{5!\cdot 2^5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}x^{2n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}x^{2n+1},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) $f(x)=e^{-x^2}$；

解：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$.

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n},\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

(4) $f(x)=\cos^2x$;

解：$\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$.

$$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\cos2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

(5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

解：$(1+x)^{\alpha}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$，$x\in(-1,1)$.

将上式中的 x 换为 $-x^2$，取 $\alpha=-\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}+\cdots,$$

即 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$.

(6) $f(x)=x^3e^{-x}$;

解：$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$.

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

$$x^3e^{-x}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+3},\ x\in(-\infty,\ +\infty).$$

(7) $f(x)=\frac{1}{3-x}$;

解：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$，$(|x|<1)$.

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x}{3}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n,\ x\in(-3,3).$$

(8) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$；

解： $\dfrac{x}{x^2-2x-3}=\dfrac{x}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{x}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}\right)$，

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1),\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1).$$

$$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n,\ x\in(-3,3).$$

$$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{x}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x}{4}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]$$

$$=\frac{x}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}x^{n+1}-\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}\right]=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{3^n}\right]x^n,\ x\in(-1,1).$$

2. 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数，并确定收敛域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$；

解： $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$ ，$(|x|<1)$.

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2\left(1-\frac{x-2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{x-2}{2}+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n,\ x\in(0,4).$$

(2) $f(x)=\ln x$；

解： $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$，$x\in(-1,1]$.

$$\ln x=\ln(x-2+2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n+1} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}(x-2)^n, x \in (0, 4].$$

(3) $f(x) = \mathrm{e}^x$;

解: $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2 \mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{e}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

(4) $f(x) = \ln \frac{1}{5-4x+x^2}$.

解: $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, x \in (-1, 1].$

$$\ln \frac{1}{5-4x+x^2} = -\ln[1+(x-2)^2] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-2)^{2n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-2)^{2n}, x \in [1, 3].$$

4.5 函数的幂级数展开式的应用

4.5.1 知识点概况

1. 近似计算

利用函数的幂级数展开式，可用来作近似计算，即在展开式有效的区间上，函数值可近似地利用这个级数按精确度要求来计算．

2. 表示初等函数

区间上的连续函数存在原函数，但其原函数却未必是初等函数．可以利用相关初等函数的幂级数展开式，将 $\varphi(x)$ 化为幂级数．应用这个幂级数讨论函数 $\varphi(x)$ 的性质，特别是计算或近似计算它的函数值更为方便．

3. 求常数项级数和

由所给常数项级数的特点，构造一幂级数，然后求这个幂级数的和函数，所求常数项级数的和就是这个幂级数的和函数在某一点的函数值．

4. 微分方程的幂级数解法

利用幂级数函数的展开式也可求解微分方程，下面分两种情况来讨论．

(1) 一阶微分方程的情形

对一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，若 $f(x,y)$ 是 $x-x_0$ 及 $y-y_0$ 的多项式，即

$$f(x,y)=a_{00}+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(y-y_0)+\cdots+a_{im}(x-x_0)^i(y-y_0)^m,$$

则可以设该方程在初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 下的特解可以展开为 $x-x_0$ 的幂级数：

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

代入原方程，比较同次幂项的系数可定常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，由此确定的级数即为方程满足初始条件的特解．

(2) 二阶齐次线性微分方程的情形

对二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，若系数 $P(x)$，$Q(x)$ 在 $(-R,R)$ 内

可展开成 x 的幂级数，则在$(-R,R)$内该方程必有形如 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解.

5. 欧拉公式的形式推导

利用幂级数给出欧拉公式的形式推导.

4.5.2 习题解答

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各函数的近似值.

(1) ln3(误差不超过 0.0001)；

解： $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots\right),\ (-1<x<1).$$

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots\right),\ (-1<x<1).$$

又 $|r_n|=2\left[\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\dfrac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\cdots\right]$

$$=\frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left[1+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+5)\cdot 2^{2n+5}}+\cdots\right]$$

$$<\frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)=\frac{1}{3(2n+1)\cdot 2^{2n-2}}.$$

$$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012,\ |r_6|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.00003.$$

因而取 $n=6$，此时

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}}\right)\approx 1.0986.$$

(2) $\sqrt{e}$(误差不超过 0.001)；

解： $\mathrm{e}^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$,

$$\sqrt{\mathrm{e}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

$$|r_n|=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{1}{(n+1)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots\right]<\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3n!\cdot 2^{n-2}}.$$

$r_4=\frac{1}{3\cdot 5!}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0003$，因而取 $n=4$，此时

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}\approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过 0.00001)；

解： $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1).$

$$\sqrt[9]{522}=2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}=2\left[1+x-\frac{8}{9^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2+\frac{8\cdot 17}{9^2\cdot 3!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^3+\cdots\right],$$

$\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}\approx 0.002170$，$\frac{8}{9^2\cdot 2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2\approx 0.000019$，

故 $\sqrt[9]{522}=2\cdot(1+0.002170-0.000019)\approx 2.00430.$

(4) $\cos 2^\circ$(误差不超过 0.0001).

解： $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,(-\infty<x<+\infty).$

$$\cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^6+\cdots,$$

由于 $\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\approx 6\times 10^{-4}$，$\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\approx 10^{-8}$，

$$\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\approx 1-0.0006=0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值.

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$(误差不超过 0.0001)；

解： $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}[1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots]dx$

$$=\left(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots.$$

因为 $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.00625$，$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.00028$，$\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009$，

所以$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.4940.$

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$(误差不超过 0.001).

解: $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,(-1<x<1).$

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}\left[1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n}+\cdots\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left(x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{25}x^5-\frac{1}{49}x^7+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots.$$

因为$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0139$，$\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.0013$，$\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002$，

所以$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.487.$

4.6 傅里叶级数

4.6.1 知识点概况

1. 傅里叶级数

三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中,a_0, a_n 和 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 都是实常数，称为傅里叶级数 .

2. 傅里叶级数的收敛性

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若在$[-\pi,\pi]$上满足：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上收敛,其和函数为

$$s(x)=\begin{cases}f(x),\ x\in(-\pi,\pi),\ x\text{ 是 }f(x)\text{ 的连续点}.\\ \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ x\in(-\pi,\pi),\ x\text{ 是 }f(x)\text{ 的间断点}.\\ \dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],\ x=\pm\pi.\end{cases}$$

即$\dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

3. 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是 $2l$ 为周期的函数，并且在$[-l,l]$上满足狄里克雷条件. 为了求得 $f(x)$ 的傅里叶展开式，作变量替换 $x=\dfrac{ly}{\pi}$，则 $f(x)=f\left(\dfrac{ly}{\pi}\right)$，记 $g(y)=f\left(\dfrac{ly}{\pi}\right)$，则 $g(y)$ 是一个以 2π 为周期的函数，并且在$[-\pi,\pi]$上满足狄里克雷条件，从而可以得到 $g(y)$ 的傅里叶级数为

$$g(y)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny).$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}y\right)\cos ny\,\mathrm{d}y,\ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}y\right)\sin ny\,\mathrm{d}y,\ (n = 1, 2, \cdots).$$

再将变量变回到 x，即可得到 $f(x)$ 在$[-l, l]$ 上的傅里叶展开式：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ (n = 1, 2, \cdots).$$

4. 傅里叶级数的复数形式

设周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 在区间$[-l, l]$ 满足狄里克雷条件，可以展开成傅里叶级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ (n = 1, 2, \cdots).$$

利用欧拉公式 $\cos t = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}$，$\sin t = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$，有

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}) - \frac{\mathrm{i}b_n}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}})\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\right). \end{aligned}$$

若记

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2},\ (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式就可以写成如下的简洁形式：

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}},$$

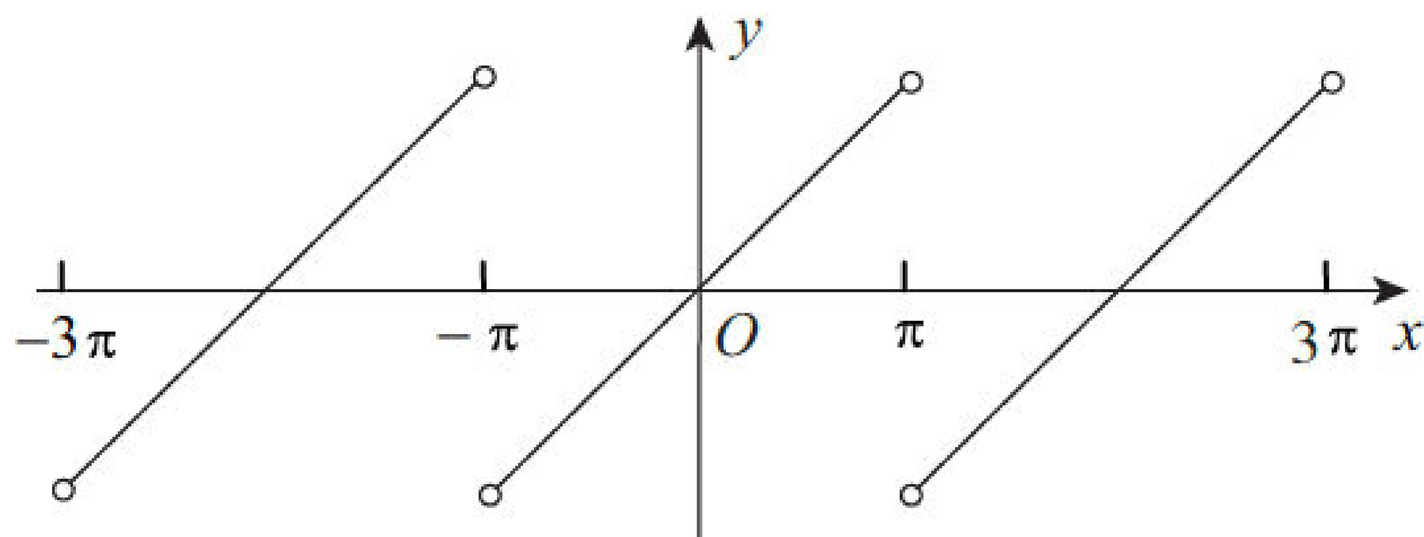
$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x,\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

4.6.2 习题解答

1. 在指定区间内把下列函数展开为傅里叶级数.

(1) $f(x)=x$，①$-\pi<x<\pi$，②$0<x<2\pi$；

解：①$f(x)=x$，$-\pi<x<\pi$ 作周期延拓的图象如下．



其按段光滑，故可展开为傅里叶级数．

由系数公式得：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x=0.$$

当 $n\geqslant1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}(\sin nx)$$

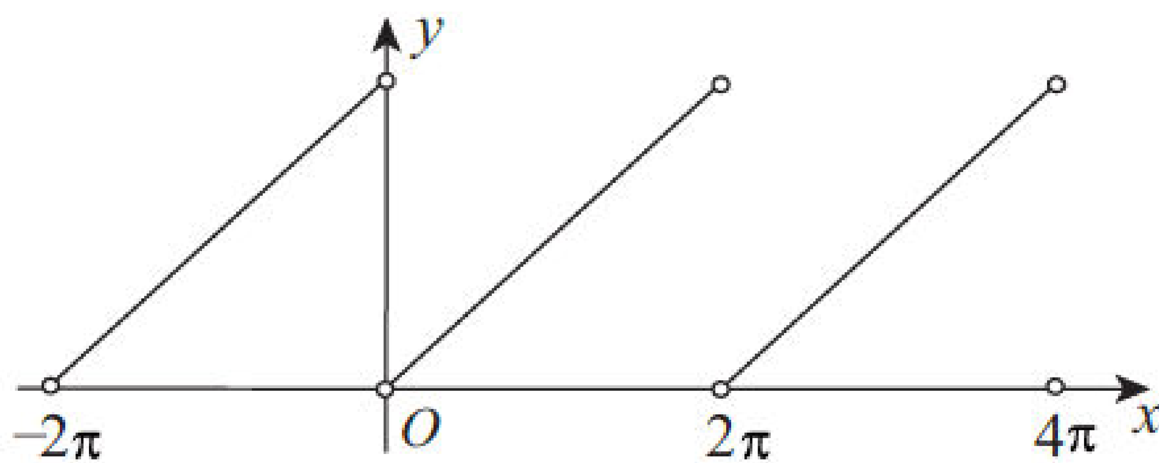
$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$=\frac{-1}{n\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

所以 $f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$，$x\in(-\pi,\pi)$ 为所求．

② $f(x)=x$，$0<x<2\pi$ 作周期延拓的图象如下．



其按段光滑，故可展开为傅里叶级数．



由系数公式得：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}x=2\pi.$$

当 $n\geqslant 1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{con}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\,\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

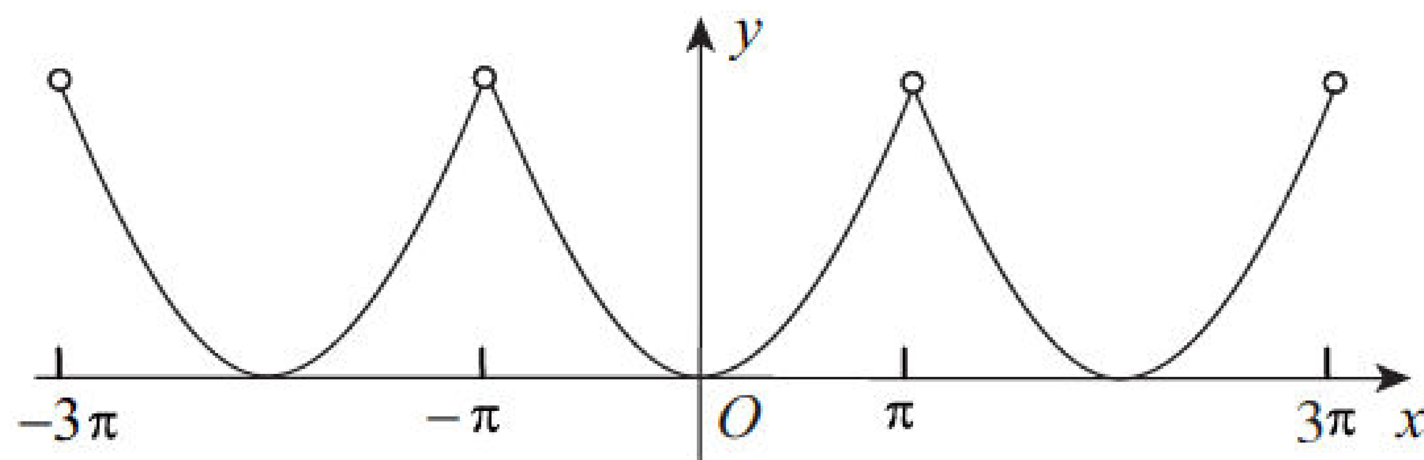
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$=\frac{-1}{n\pi}x\cos nx\,\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{-2}{n},$$

所以 $f(x)=\pi-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$，$x\in(0,2\pi)$ 为所求．

(2) $f(x)=x^2$，① $-\pi<x<\pi$，② $0<x<2\pi$；

解： ① $f(x)=x^2$，$-\pi<x<\pi$ 作周期延拓的图象如下．



其按段光滑，故可展开为傅里叶级数．

由系数公式得：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}.$$

当 $n\geqslant 1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$=\frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}x^2\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}(\cos nx)$$

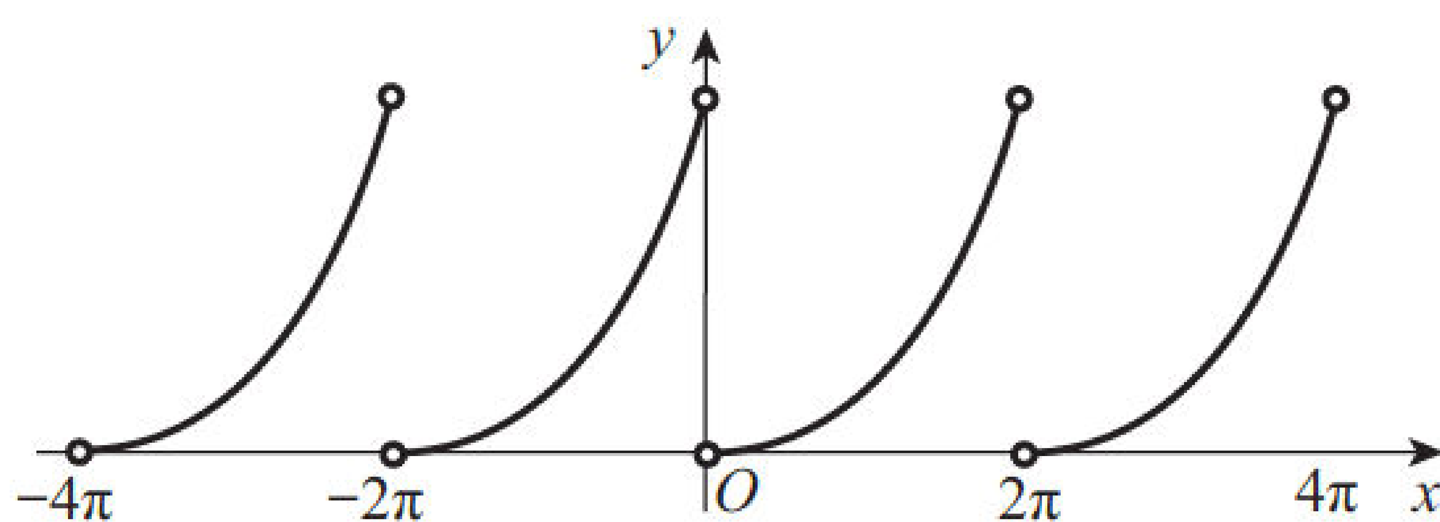
$$= \frac{-1}{n\pi}x^2\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}x\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

所以 $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n^2}$，$x \in (-\pi, \pi)$ 为所求．

② $f(x) = x^2$，$0 < x < 2\pi$ 作周期延拓的图象如下．



其按段光滑，故可展开为傅里叶级数．

由系数公式得

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8\pi^2}{3}.$$

当 $n \geqslant 1$ 时，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$= \frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}2x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x\,\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\,\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$= \frac{-1}{n\pi}x^2\cos nx\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

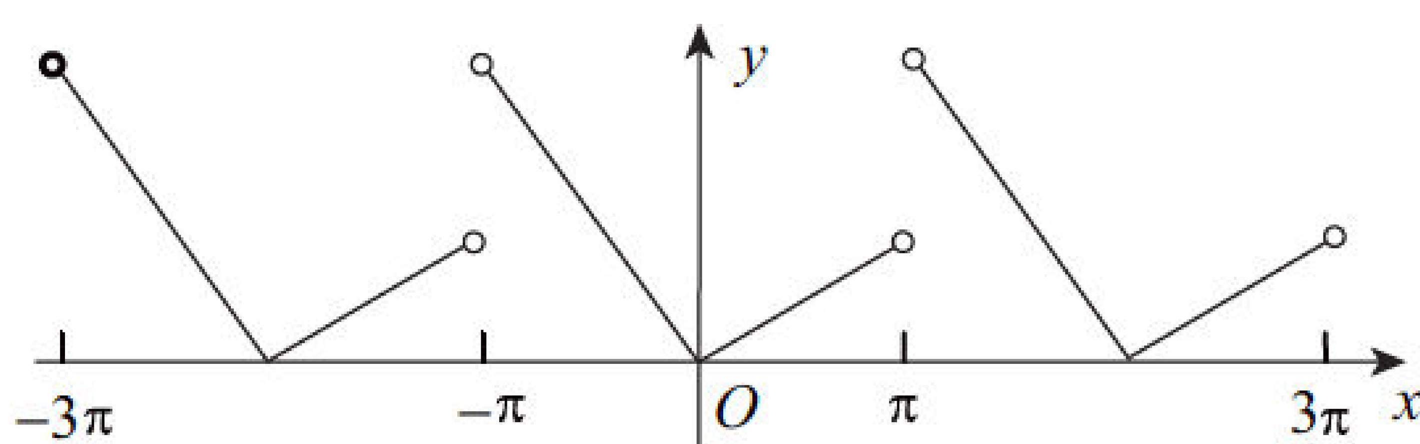
$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n^2\pi}x\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{4\pi}{n},$$

所以 $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n^2}\right)$，$x\in(0,2\pi)$ 为所求．

(3) $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x\leqslant 0,\\ bx, & 0<x<\pi,\end{cases}$ $(a\neq b,\ a\neq 0,\ b\neq 0)$.

解：函数 $f(x)$，$-\pi<x<\pi$，作周期延拓的图象如下．



其按段光滑，故可展开为傅里叶级数．

由系数公式得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\,\mathrm{d}x=\frac{\pi(b-a)}{2}.$$

当 $n\geqslant 1$ 时，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=[1-(-1)^n]\frac{a-b}{n^2\pi},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n},$$

所以 $f(x)=\frac{\pi(b-a)}{4}+\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi}{n}$，$x\in(-\pi,\pi)$ 为所求．

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数，证明对任何实数 c，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

证明： 因为 $f(x)$，$\sin nx$，$\cos nx$ 都是以 2π 为周期的可积函数，所以令 $t=x+2\pi$ 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{c}^{-\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{c+2\pi}^{\pi}f(t-2\pi)\cos n(t-2\pi)\,\mathrm{d}(t-2\pi)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{c+2\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

从而 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{-\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

同理可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

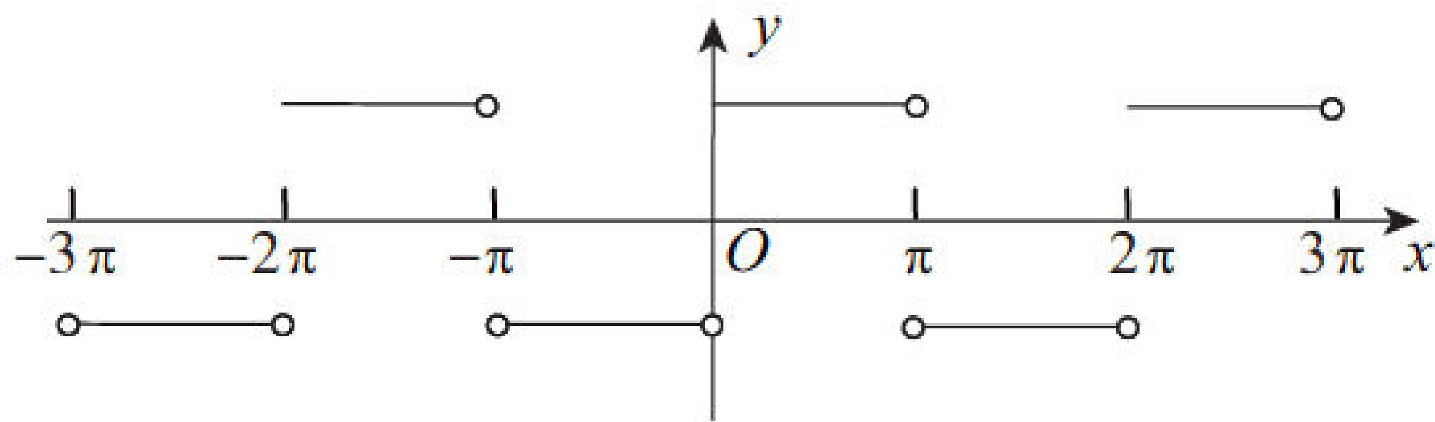
3. 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ \frac{\pi}{4}, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数，并由它推出

(1) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$；

(3) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$.

解： 函数 $f(x)$，$-\pi<x<\pi$，作周期延拓的图象如下．



其按段光滑，故可展开为傅里叶级数．

由系数公式得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{-\pi}{4}\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\mathrm{d}x=0.$$

当 $n\geqslant 1$ 时，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi}{4}\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4}\cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi}{4}\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= [1-(-1)^{n+1}]\frac{1}{2n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

故 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$，$x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ 为所求.

(1) 取 $x = \frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$；

(2) 由 $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ 得 $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \cdots$，

于是 $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots$；

(3) 取 $x = \frac{\pi}{3}$，则 $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots\right)$，

所以 $\frac{\sqrt{3}\pi}{6} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots$.

4.7 总习题解答

1. 选择题

(1) 设常数 $\lambda > 0$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 是(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 收敛与 λ 有关

(2) 设 $p_n = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}$，$q_n = \dfrac{a_n - |a_n|}{2}$，$n = 1, 2, \cdots$，则下列命题中正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

(3) 设 $a_n > 0$，$n = 1, 2, \cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ 收敛，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛

(4) 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是(　　).

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 收敛性与 α 取值有关

(5) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1 - \cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha > 0$) 是(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 α 有关

(6) 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^2$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

(7) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于(　　).

(A) 3　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

(8) 设函数 $f(x) = x^2(0 \leqslant x \leqslant 1)$，而

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < \infty$$

其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x \mathrm{d}x$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于(　　).

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2-2x, \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$ $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, -\infty < x < +\infty.$

其中 $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x \mathrm{d}x$，$(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $-\frac{3}{4}$

(10) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$

(11) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛

(12) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = 1$ 处收敛，则此级数在 $x = 2$ 处(　　).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性不能确定

(13) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为$\frac{\sqrt{5}}{3}$与$\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为(　　).

(A)5　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{5}$

1. **解：**

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
C	B	D	C	C	C	C	B	C	D	D	B	A

2. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

分析： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 表明 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小，若能进一步确定 $f(x)$ 是 x 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小，$p>1$，从而 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 也是$\frac{1}{n}$ 的 p 阶或高于 p 阶的无穷小，这就证明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 绝对收敛.

证明： 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 的连续性 $\Rightarrow f(0)=0$，$f'(0)=0$。再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域有二阶连续导数及洛必达法则

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.$$

由函数极限与数列极限的关系 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛.

3. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？

【分析与求解】 因 $\{a_n\}$ 单调下降有下界 $0\Rightarrow\exists$ 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n=a\geqslant 0$. 若 $a=0$，由莱布尼

兹法则，并错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与假设矛盾，于是 $a>0$.

现在对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 可用根值审敛法：因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1,$$

所以原级数收敛.

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

【分析与求解】 直接用求收敛半径的公式，先求

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3(1+(-\frac{2}{3})^n)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3}.$$

于是收敛半径 $R=3$，收敛区间为$(-3,3)$.

当 $x=3$ 时是正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$.

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}(n\to+\infty)，而\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}发散，$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}发散，即 x=3 时原幂级数发散.$$

当 $x=-3$ 时是变号级数，我们用分解法讨论它的敛发散.

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\frac{(-1)^n(3^n+(-2)^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$因\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{2^n}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=0，\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n收敛.$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}收敛，又\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}收敛\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}收敛，即 x=-3$$

时原幂级数收敛.

5. 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$.

【分析与证明】

首先验证该幂级数的收敛区间是$(-\infty,+\infty)$. 这是缺项幂级数，令 $t=x^3$，则

$$\text{原级数}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(3n)!}$$

由
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(3(n+1))!}}{\frac{1}{(3n)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0$$

$\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)$，从而 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时原级数收敛.

其次，在收敛区间内对幂级数可以逐项求导任意次，这里要求逐项求导两次：

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\ y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

于是
$$y''(x)+y'(x)+y(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$
$$\xlongequal{\text{级数的线性性质}}1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right]$$
$$=1+\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$=e^x(-\infty<x<\infty)$.（收敛级数与它任意添加括号后的级数有相同的和）

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

【分析与求解】 这是缺项幂级数，令 $t=x^2$，考察 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$，其中

$$a_n=(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right].$$

由
$$1<\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\sqrt[n]{2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛半径为 1 $\Rightarrow$ 原幂级数收敛半径为 1，收敛区间为$(-1,1)$.

下面求和函数：

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2},$$

$$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n},$$

$$\Rightarrow f'_2(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f''_2(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\frac{2}{1+x^2}(|x|<1).$$

注意 $f'_2(0)=0$，$f_2(0)=0$，积分两次得

$$f'_2(x)=\int_0^x f''_2(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan x,$$

$$f_2(x)=\int_0^x f'_2(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)(|x|<1).$$

因此，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2)$.

7. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n}(n^2-n+1)$ 的和.

【分析与求解】 先将级数分解：

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(n^2-n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(n-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

第二个级数是几何级数，它的和已知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

求第一个级数的和转化为幂级数求和，考察

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=\frac{1}{1+x}(|x|<1)$$

$$\Rightarrow S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nn(n-1)x^{n-2}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\right]''=\left(\frac{1}{1+x}\right)''=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(n-1)=\frac{1}{2^2}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{4}{27}.$$

因此原级数的和 $\quad A=\dfrac{4}{27}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{27}$.

8. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

【分析与求解】 先用分解法将原级数分解.

$$A=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n-1)}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\text{ 记 }A_1-A_2.$$

要熟记五个简单函数的幂级数展开式，与此级数和有关的是 $\ln(1+x)$，即

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\leqslant 1).$$

于是 $$A_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}n}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln 2,$$

$$A_2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$$

$$=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\ln 2-\frac{5}{8},$$

因此 $$A=A_1-A_2=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

9. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

【分析与求解】 $f'(x)$ 容易展开.

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

由 $\dfrac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n(|t|<1)$，得

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(|x|<1).\qquad ①$$

在幂级数的收敛区间内可逐项积分得

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right]\qquad ②$$

且收敛区间不变，当 $x=\pm 1$ 时，② 式右端级数均收敛，而左端 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=-1$ 连续，在 $x=1$ 无定义，因此

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1).$$

10. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

【分析与求解】 $f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$，先求 $f'(x)$ 的展开式

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}(|x|<1)$$

积分得 $$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(|x|<1).$$

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{2}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

【分析与求解】 关键是将 $\arctan x$ 展成幂级数，然后约去因子 x，再乘上 $1+x^2$ 并化简即可. 直接将 $\arctan x$ 展开办不到，且 $(\arctan x)'$ 易展开，即

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ |x|<1, \qquad ①$$

积分得

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan t)'\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ x\in[-1,1]. \qquad ②$$

因为右端级数在 $x=\pm1$ 时均收敛，又 $\arctan x$ 在 $x=\pm1$ 连续，所以展开式在收敛区间端点 $x=\pm1$ 成立.

现将 ② 式两边同乘 $\frac{1+x^2}{x}$ 得

$$\frac{1+x^2}{x}\arctan x=(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1],\ x\neq 0.$$

上式右端当 $x=0$ 时取值为 1，于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1].$$

上式中令 $x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{1}{2}\left[2\times\frac{\pi}{4}-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

12. 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的和.

【分析与求解】 按傅氏系数公式，先求 $f(x)$ 的傅氏系数 a_n 与 b_n.

因 $f(x)$ 为偶函数 $b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$.

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\overset{l=1}{=\!=}2\int_0^1(2+x)\cos n\pi dx$$

$$=4\int_0^1\cos n\pi x dx+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x d\sin n\pi x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5.$$

注意到 $f(x)$ 在$[-1,1]$分段单调，连续且 $f(-1)=f(1)$，于是有傅氏展开式

$$f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x,\ x\in[-1,1].$$

为了求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值，上式中令 $x=0$ 得

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\ 即\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

现由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

13. 将函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

【分析与求解】 这就是将 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期 4 的周期延拓，于是得 $f(x)$ 的傅氏系数：

$$b_n=0(n=1,2,3,\cdots).$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\overset{l=2}{=\!=}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi}{2}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,3,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2=0.$$

由于(延拓后)$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 分段单调、连续且 $f(-1)=f(1)$. 于是 $f(x)$ 有展开式

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x,\ x\in[0,2].$$